

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Física de Materiales**



**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LOS EFECTOS  
GALVANOMAGNÉTICOS EN EL GAS DE ELECTRONES  
BIDIMENSIONAL**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

**Miguel Ángel Hidalgo Moreno**

Bajo la dirección del doctor

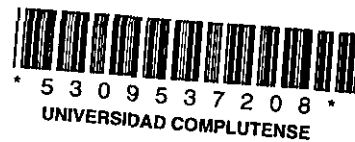
Francisco Batallán Casas

**Madrid, 2002**

ISBN: 978-84-669-0420-9

©Miguel Ángel Hidalgo Moreno, 1995

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**



**TESIS DOCTORAL**

**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LOS  
EFECTOS GALVANOMAGNÉTICOS EN EL  
GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL**

**Memoria presentada por**

**Miguel Angel Hidalgo Moreno**

**para alcanzar el grado de Doctor en CC. Físicas**

**Director: Dr. Francisco Batallán Casas**

*A mi familia.*

# AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración con Susana Fernández de Avila y José Manuel Gilpérez del Departamento de Ingeniería Electrónica de la E.I.T.S. de la Universidad Politécnica de Madrid, quienes nos confiaron sus muestras para someterlas a un *tratamiento* de bajas temperaturas (hasta 1.2K) y condiciones extremas de campo magnético (sobre 11.5T). Por esa confianza vaya mi agradecimiento y la esperanza de poder seguir colaborando en un futuro.

Una vez que uno dispone de unas buenas muestras y de un excelente equipo, como el que ha montado a lo largo de los últimos años el Prof. Francisco Batallán, con la impagable e indispensable aportación de Carlos y Antonio, *sólo* queda medir, obtener resultados experimentales y pensar la forma de sacarles el máximo partido para la comprensión del fenómeno. Esta es una tarea que resulta en muchos momentos árdua y hasta tediosa pero que si tienes a tu lado personas de la calidad humana de Paco, Carlos y Antonio puede resultar liviana, a pesar de que algunas tardes acabásemos con la cabeza como un *bombo* tras acaloradas aunque, eso sí, *deportivas* discusiones. Gracias a los tres.

A mis amigos sobre todo quiero agradecerles su amistad, de la que esperó no se arrepientan tras haber tenido que soportarme en la parte final de redacción de esta memoria. A Almudena y a Miguel, que estoicamente me han sacado de paseo para que no me diera el *síndrome monacal*, muy usual en la última fase de gestación de una tesis; a Pilar y a Carlos por haberse desplazado los domingos al Café Mediodía a las 20.00 horas, (con aviso telefónico incluido), para ingerir una inhumana cantidad de zumos de limón y *Coca-Cola*, por supuesto *light*, y haber aguantado mi berborrea con una paciencia rallando la *Divina*. A Malenix, Enrique, J. M., Pepigno y Xavi, por su compañía y apoyo en mi singladura alcalaína y, sobre todo, por las lúdicas jornadas *indálicas*. A Pepe y Pilarica que han tenido que soportar mis proyectos de colaboración científica y con quien he mantenido vivo los recuerdos de Nicaragua. A Agustín sin cuya ayuda me hubiera perdido en el mundo de los *buses* y *bits*.

Por supuesto quiero agradecer a todos los compañeros del Departamento de Física de la Universidad de Alcalá de Henares el trato que siempre me han dado desde mi llegada al departamento.

No quiero olvidarme en los agradecimientos de mis amigos nicaragüenses: Patricia, Giovanna, Guille, Jonathan que aunque la distancia es mucha sé que su apoyo es incondicional.

Quiero agradecer también a Luis y al Sr. Alonso (alias Toni) su compañía en largas noches de redacción para mí y de tediosas rondas para ellos (fines de semana incluidos).

Sería injusto que no diera las gracias, aunque este agradecimiento no llegue a su destinatario, a todos los locutores de Radio 2 (la de siempre) por su *fidelidad* y compañía en interminables horas de soledad ante el ordenador.

Pero todos comprenderán que mi mayor agradecimiento sea para mi familia que siempre ha estado conmigo y en especial, a mi hermano, el *culpable* de que yo estudiara Física, y quien me apoyó incondicionalmente en los momentos difíciles.

A todos, Gracias.

*“La distancia más corta entre  
dos puntos habitualmente está  
en construcción”.*

*Anónimo*

# RELACIÓN DE ABREVIATURAS

**B:** Campo magnético.

**dHvA:** Efecto de de Haas-van Alphen.

**EHC:** Efecto Hall Cuántico.

**EHCE:** Efecto Hall Cuántico Entero.

**EHCF:** Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

$\vec{E}'$ : Campo eléctrico de transporte.

$\vec{E}''$ : Campo eléctrico de la unión.

**GE1D:** Gas de Electrones Cuasi-Unidimensional.

**GE2D:** Gas de Electrones Cuasi-Bidimensional.

$\vec{L}_g$ : Momento angular orbital generalizado.

**n-D:** Sistema n-dimensional.

$\vec{\pi}$ : Momento lineal generalizado.

**R:** Longitud magnética.

**$R_L$ :** Radio de Larmor.

**S1D:** Sistema Cuasi-Unidimensional.

**S2D:** Sistema Cuasi-Bidimensional.

**S3D:** Sistema Tridimensional.

**SdH:** Efecto Shubnikov-de Haas.

**$V_g$ :** Tensión de puerta de la estructura *FET*.

# ÍNDICE TEMÁTICO

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>PARTE I: EL GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL.....</b>	<b>5</b>
<b>PARTE II: EFECTOS GALVANOMAGNÉTICOS CLÁSICOS EN SISTEMAS CUASI-BIDIMENSIONALES.....</b>	<b>13</b>
<b>PARTE III: DENSIDAD DE ESTADOS DE UN SISTEMA CUASI-BIDIMENSIONAL EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO.....</b>	<b>27</b>
<b>PARTE IV: DESARROLLO DEL MODELO TEÓRICO</b>	
1.Introducción.....	39
2.Dependencia térmica de los efectos cuánticos.....	43
3.Propiedades de transporte en función del campo magnético:	
3.1.Introducción.....	45
3.2.Magnetoconductividad Hall.....	48
3.3.Magnetoconductividad diagonal.....	53
3.4.Magnerresistencias Hall y diagonal.....	59
4.Propiedades de magnetotransporte en función de la tensión de puerta:	
4.1.Introducción.....	61
4.2.Magnetoconductividad Hall.....	63
4.3.Magnetoconductividad diagonal.....	65
4.4.Magnetoresistencias Hall y diagonal.....	66
5.Efecto Hall cuántico y Shubnikov-de Haas para el caso de dos subbandas.....	66
6.Otros modelos teóricos sobre el efecto Hall cuántico entero.....	68
7.Extensión del modelo teórico a las propiedades de equilibrio de un gas de electrones <i>cuasi-</i> bidimensional:	
7.1.Introducción.....	74
7.2.Efecto de de Haas-van Alphen.....	75



7.3. Calor específico.....	78
7.4. Magnetocapacidad.....	80

## **PARTE V: TÉCNICA EXPERIMENTAL**

### **1. Descripción de la instrumentación:**

1.1. Descripción del criostato.....	86
1.2. Generación del campo magnético.....	86
1.3. Electrónica de medida.....	88
1.3.1. Fuente de intensidad.	
1.3.2. Voltímetro.	
1.3.3. Fuente de tensión.	
1.3.4. Regulación de temperaturas.	

### **2. Configuraciones de los contactos en una medida de efecto Hall y magnetorresistencia**

diagonal .....	89
----------------	----

## **PARTE VI: DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES**

1. Características de las muestras medidas.....	91
2. Magnetorresistencias, $R_{xx}$ y $R_{xy}$ , en función de B.....	93
3. Determinación del número de portadores:	
3.1. Pendiente Hall.....	95
3.2. Transformada de Fourier.....	95
4. $R_{xx}$ y $R_{xy}$ en función de $V_g$ a varios B.....	96
5. $R_{xx}$ y $R_{xy}$ en función de $V_g$ a varias temperaturas.....	98
6. $R_{xx}$ y $R_{xy}$ en función de B a varias temperaturas.....	99

## **PARTE VII: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON EL**

<b>MODELO TEÓRICO</b> .....	101
-----------------------------	-----

## **PARTE VIII: EXTENSIONES DEL MODELO TEÓRICO**

1.Efecto Hall Cuántico Fraccionario (EHCF):	
1.1.Introducción.....	113
1.2.Efecto Hall cuántico fraccionario.....	115
1.3.Otros modelos teóricos sobre el efecto Hall cuántico fraccionario.....	123
2.Sistemas Cuasi-unidimensionales (S1D):	
2.1.Introducción.....	126
2.2.Densidad de estados de un sistema cuasi-unidimensional.....	127
2.3.Magnetorresistencia de un sistema cuasi-unidimensional.....	129
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>133</b>
 <b>APÉNDICES</b>	
1.Densidad de estados en sistemas 1D, 2D, 3D.....	135
2.Estados de Energía en Sólidos.....	139
2.1.Electrones extendidos.....	137
2.2.Aproximación de la masa efectiva.....	142
2.3.Aproximación $\vec{k} \cdot \vec{p}$ .....	143
3.Efecto de las impurezas sobre un nivel de Landau.....	145
4.Ecuación de Boltzman. Aproximación $\tau$ .....	147
5.Fórmula extendida de la suma de Poisson.....	153
6.Teorema de convolución.....	155
7.Simulación del efecto Hall cuántico fraccionario.....	157
8.Hamiltoniano de un sistema cuasi-bidimensional.....	159
 <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	 <b>165</b>

# INTRODUCCIÓN

En esta memoria resumimos el trabajo tanto experimental como teórico que hemos desarrollado en los últimos años.

Respecto a la parte experimental disponemos actualmente de una cantidad importante de resultados sobre las componentes diagonal ( $R_{xx}$ ) y no diagonal ( $R_{xy}$ ) de la magnetorresistencia transversa de un gas de electrones bidimensional. En la parte teórica hemos desarrollado un modelo simple para tratar globalmente el efecto Hall cuántico entero (EHCE) y el Shubnikov-de Haas (SdH) con un enfoque diferente al que se puede encontrar en la bibliografía. Está basado en la aproximación de electrones independientes y combina conceptos bien establecidos de la física del estado sólido a altos campos magnéticos. En su desarrollo hemos utilizado el conjunto de resultados experimentales obtenidos sobre ambos fenómenos en nuestro propio laboratorio.

La memoria está estructurada en cuatro bloques: El primero, que abarca las cuatro primeras partes, es el bloque teórico en el que incluimos todo el desarrollo de nuestro modelo. En el segundo, que corresponde a las dos partes siguientes, presentamos el conjunto de resultados experimentales. Hay un tercer bloque, [Parte VII], dedicado íntegramente al análisis de estos resultados y a su comparación con el modelo teórico. Por último, en la [Parte VIII], abordamos desde un punto de vista teórico otros fenómenos cuánticos que aparecen en los sistemas semiconductores de baja dimensionalidad.

A continuación pasamos a detallar brevemente el contenido de cada parte: En la [Parte I] definimos el concepto de gas de electrones *cuasi*-bidimensional (GE2D), describiendo los posibles estados energéticos del potencial de confinamiento de una heteroestructura semiconductor, y la densidad de estados correspondiente a un sistema *cuasi*-bidimensional (S2D). En la [Parte II], hacemos un repaso exhaustivo de los efectos galvanomagnéticos en un S2D con el campo magnético aplicado en la dirección perpendicular al mismo. Este estudio es importante porque, como veremos en la [Parte IV], el conocimiento de la expresión semiclásica de las componentes diagonal y Hall del tensor de magnetoconductividad es fundamental a la hora de abordar el problema en el régimen cuántico. La [Parte III] está dedicada al cálculo de la densidad de estados del sistema electrónico cuando es efectiva la cuantización de los estados del electrón en presencia de un campo magnético, es decir, cuando aparecen

los *niveles de Landau*. Para tratar globalmente el conjunto de estos niveles hacemos una extensión de la fórmula de la suma de Poisson, [Apéndice 5]. La consecuencia de la cuantización de los estados energéticos de un GE2D en las propiedades de magnetotransporte nos lleva a la [Parte IV], en la que presentamos nuestro modelo. Este en principio fue desarrollado para tratar el magnetotransporte, aunque nos dimos cuenta que era lo suficientemente general para abarcar otras propiedades físicas de los S2D, como la imanación, [Apartado 7.2], el calor específico, [Apartado 7.3], y la magnetocapacidad, [Apartado 7.4], de las que, eso sí, no disponemos de resultados experimentales y hemos tenido que hacer uso de las referencias bibliográficas.

La [Parte V] se dedica a una breve descripción del montaje experimental utilizado en las medidas del EHCE y SdH, detallando cada uno de los elementos necesarios. Los resultados experimentales y las características particulares de las muestras que hemos medido se resumen en la [Parte VI].

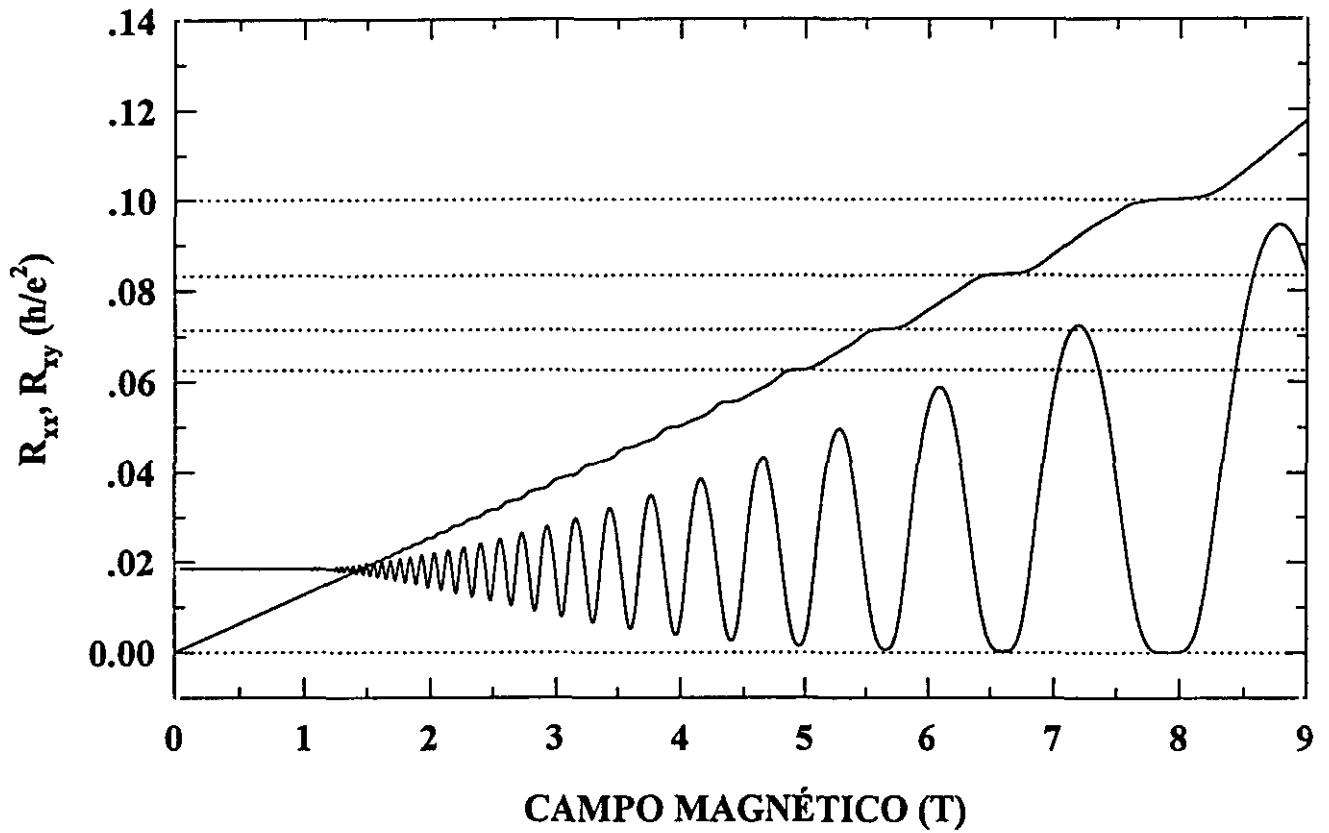
La comparación del modelo con los resultados es, junto con la [Parte IV], la parte fundamental de la memoria. En la [Parte VII] discutimos con detalle los ajustes del modelo y establecemos sus límites, empleándolo, a su vez, para comprender los fenómenos asociados a ambas magnetorresistencias. En algunos tipos de medida de la que no disponíamos de resultados propios, hemos utilizado los existentes en la bibliografía.

En la [Parte VIII] extendemos las ideas del modelo al caso más complejo del efecto Hall cuántico fraccionario (EHCF), que analizamos desde una óptica diferente. Para llegar a las conclusiones que se exponen estudiamos detalladamente la bibliografía experimental sobre el tema. Por último, en la parte final consideramos brevemente el reciente problema del transporte electrónico en los S1D.

A lo largo de la memoria hemos tratado de cubrir el mayor número de aspectos relacionados con el EHC y SdH tanto desde un punto de vista experimental como teórico. Sin embargo, no queremos terminar esta introducción sin mencionar cuestiones que han quedado pendientes y que esperamos constituyan nuestras próximas actividades. Así, por ejemplo, queremos realizar un estudio sistemático del comportamiento en función de la intensidad de corriente que pasa por la muestra, medidas de magnetocapacidad, medidas de magnetorresistencia diagonal y Hall sobre

muestras con dos subbandas ocupadas, medidas no locales de magnetorresistencia diagonal, desarrollo de un método automatizado de ajuste, etc.

Pienso que la mejor forma de terminar esta introducción es mostrando curvas experimentales correspondientes al EHCE ( $R_{xy}$ ) y SdH ( $R_{xx}$ ), obtenidas en nuestro laboratorio.





# I

## EL GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL

Esta memoria se centra básicamente en el estudio de los efectos galvanomagnéticos de sistemas semiconductores que tienen, desde un punto de vista dinámico, un carácter bidimensional. Esta bidimensionalidad se ha de entender en el siguiente sentido: Los posibles estados de energía del electrón están cuantizados en una dimensión espacial,  $z$ ; sin embargo, los electrones pueden moverse libremente en las otras dos direcciones espaciales,  $x$  e  $y$ . Por supuesto, estos sistemas no son bidimensionales en sentido estricto debido a que las funciones de onda tienen una extensión espacial en la dirección  $z$ , y los campos electromagnéticos que actúan sobre los electrones no están confinados en el sistema bidimensional. Todas estas consideraciones nos llevan a utilizar a lo largo de la memoria el concepto de sistema *cuasi*-bidimensional, que denotaremos por simplicidad con las siglas S2D.

En esta primera Parte vamos a describir cómo se obtiene un S2D real y cuáles son sus propiedades físicas básicas: la cuantización de su energía en la dirección  $z$ , dando lugar a las *subbandas*, y su densidad de estados.

El primer dispositivo en el que se obtuvo un gas de electrones cuyo comportamiento se podía asimilar al de un sistema *cuasi*-bidimensional, fue el transistor *MOS* (Metal-Oxido-Semiconductor), [Fig.1(a)], compuesto de una *puerta* metálica, un óxido (generalmente  $\text{SiO}_2$ ) y *Si* con un dopaje tipo p no demasiado fuerte. Al aplicar sobre el transistor una tensión de puerta positiva, los electrones son atraídos hacia la superficie de separación entre el  $\text{SiO}_2$  y el *Si*, [Fig.1(b)]. Si seguimos aumentando esta tensión hasta el punto de que el fondo de la banda de conducción se aproxime y traspase el nivel de Fermi, aparece una región próxima a esta superficie en la que se

mejora la conductividad. Esta constituye la *capa de inversión*, denominada así porque esta región ha pasado de tener un comportamiento tipo p a uno n. Por otro lado, como el movimiento de los electrones está restringido a una zona próxima a la superficie de separación, podemos considerar que se comporta como un gas de electrones *cuasi-bidimensional* (GE2D). La región donde las bandas están curvadas será una región de alta resistividad debido a la reducción de la densidad de portadores.

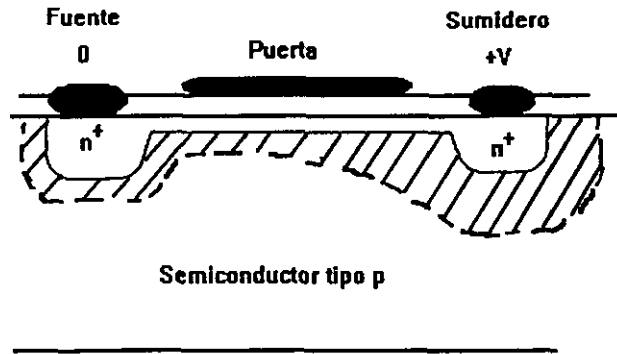


Figura 1(a): Esquema de un transistor MOSFET.

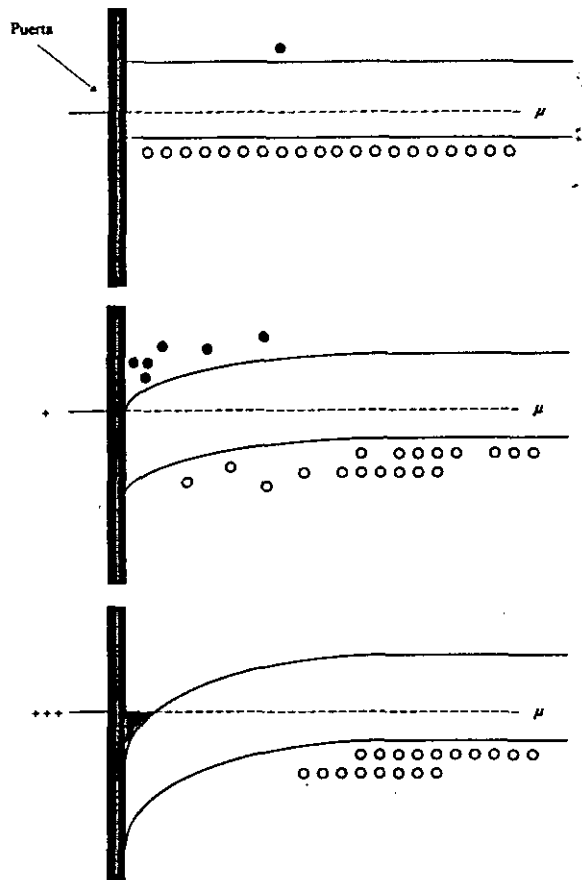


Figura 1(b): Comportamiento del transistor MOSFET en función de la tensión de puerta positiva aplicada (véase texto).



La posibilidad de modular la densidad de electrones a través de la tensión de puerta justifica la utilidad que para nosotros tiene el transistor de efecto campo (*MOSFET*), [Fig.1(a)]. Como demostraremos en el [Apartado 4] de la [Parte IV], esta puerta nos proporciona un método alternativo de estudiar el efecto Hall cuántico (EHC) y el efecto Shubnikov de Haas (SdH).

Las regiones tipo n cercanas a los contactos que hacen de fuente y sumidero para la intensidad de corriente están más fuertemente dopadas y su función es la de efectuar un buen contacto con la capa de inversión de tipo n para el paso de corriente a través del GE2D. La región de curvamiento de la banda en la unión entre el contacto tipo n y el sustrato tipo p está unido con la zona de curvamiento creada por la tensión de puerta, de manera que el canal de tipo n está completamente aislado del sustrato de tipo p.

El desarrollo del *MBE* (Epitaxia de Haces Moleculares) ha permitido obtener el otro tipo de sistemas en los que se observa el EHC, las heteroestructuras semiconductoras, [Fig.2], que se caracterizan por el crecimiento en capas sucesivas de diferentes compuestos semiconductores. De este modo se ha conseguido reducir el principal problema que presentan las estructuras *MOSFET*, esto es, la dispersión de los electrones debido a los átomos donores ionizados. Así, se obtuvo el transistor de alta movilidad electrónica, (*HEMT*), constituido por un material con dopaje tipo n, habitualmente  $Al_xGa_{1-x}As$  y denominado *barrera*, que se intercala entre el electrodo de la puerta y una zona no demasiado gruesa de *AsGa* (en el caso de nuestras muestras  $In_xGa_{1-x}As$ , [Apartado 1] de la [Parte VI]), que se dopa débilmente de tipo p. Los electrones del S2D, situados físicamente en el *AsGa* ( $In_xGa_{1-x}As$ ), y que aparecen a consecuencia de la igualación de los niveles de Fermi de cada semiconductor, provienen de los donores de  $Al_xGa_{1-x}As$ . Al estar los átomos ionizados físicamente separados del S2D no reducen la movilidad de los electrones en la capa de inversión.

La tecnología del *MBE* ha permitido, además, desarrollar un nuevo tipo de dopaje, el llamado dopaje  $\delta$ , consistente en la intercalación en el material que hace las veces de barrera de una única capa de átomos dopantes, habitualmente para un dopaje tipo n, *Si* ([Apartado 1] de la [Parte VI]).

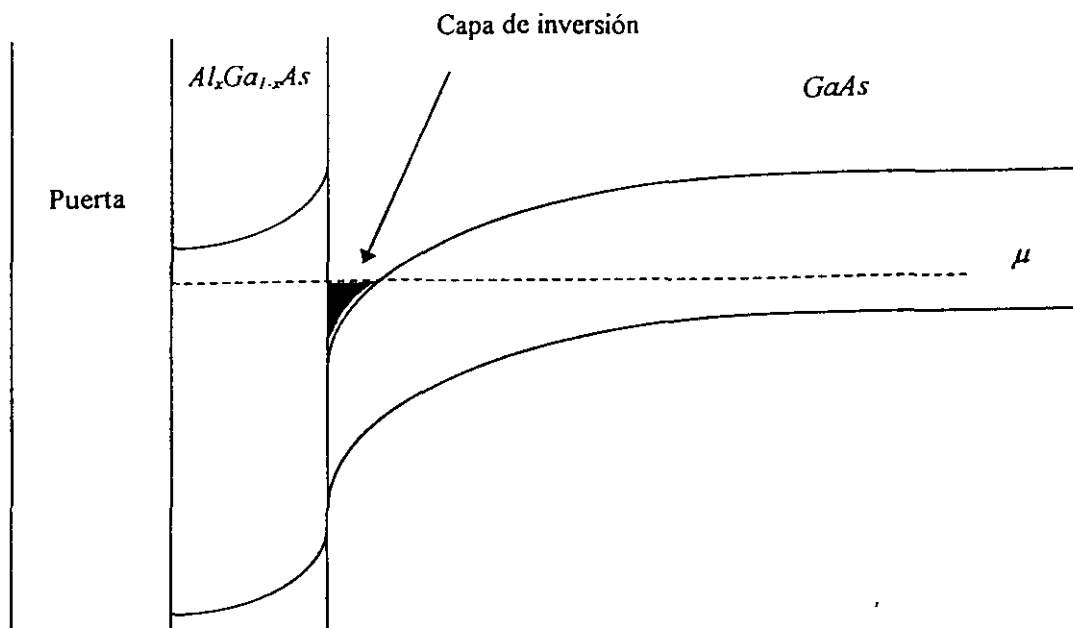


Figura 2: Esquema de un transistor HEMT basado en una heteroestructura de  $Al_xGa_{1-x}As/AsGa$ , (véase texto).

Acabamos de mencionar que para obtener un GE2D es necesario confinar electrones en una región próxima a una interfase semiconductor, [Fig.1] y [Fig.2]. En el caso del *HEMT*, al igualarse los niveles de Fermi entre los semiconductores en contacto, se produce un potencial de confinamiento (*pozo cuántico*) que da origen a una cuantización del espectro energético de los electrones en la dirección  $z$  de la interfase, lo mismo que ocurre en el caso del *MOSFET*. Con idea de obtener expresiones analíticas para estos posibles niveles energéticos hay que modelizar la forma del potencial de confinamiento. Habitualmente se emplea la aproximación de potencial triangular, [Ando,82,1], [Ando,82,2], [ChangC-S,89], con el que se obtienen los siguientes autovalores para la energía en el pozo

$$E_i = \left( \frac{\hbar^2}{8m^*} \right)^{1/3} \left[ \frac{3e^2}{2\epsilon} \left( i + \frac{3}{4} \right) \right] n_0^{2/3}$$

siendo  $i=1,2,3,\dots$ ,  $n_0$  la densidad de electrones en el pozo cuántico y  $\epsilon$  la permitividad eléctrica del medio semiconductor en el que se forma el GE2D. A cada uno de estos posibles niveles energéticos se les llama *subbanda*.

Pueden encontrarse en la bibliografía soluciones para otros perfiles de potencial como, por ejemplo, un potencial cuadrado infinito de distancia  $d$  entre sus barreras, cuyos autovalores están dados por, [Hook,91]:

$$E_i = \frac{i^2 \hbar^2}{8m^* d^2}$$

Cada una de estas subbandas corresponde a un sistema electrónico *cuasi*-bidimensional, [Apéndice 1]. Esto será importante tenerlo presente cuando abordemos en el [Apartado 5] de la [Parte IV] el estudio del efecto Hall y Shubnikov-de Haas en el caso dos subbandas ocupadas.

Por tanto, estos niveles de energía representan los posibles estados del electrón en la dirección de confinamiento. Sin embargo, en las otras dos direcciones, mientras no consideremos la acción del campo magnético, podemos considerar el electrón como *cuasi*-libre, y la energía total estará dada por la expresión

$$E = E_i + \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2)$$

El efecto del campo magnético lleva a la cuantización del segundo término de esta ecuación como discutimos con todo detalle en la [Parte III] y el [Apéndice 8].

Una magnitud importante y que caracteriza de manera precisa la dimensión del sistema electrónico es la densidad de estados a campo magnético nulo. Para el caso de los S2D, ésta viene dada por la ecuación, [Apéndice 1]:

$$g_0 = \frac{m^*}{\hbar^2 \pi} \quad [I.1]$$

Una vez conocida esta densidad de estados y la densidad de electrones en el S2D,  $n_0$ , podemos determinar la posición del nivel de Fermi. Así es, a la temperatura del cero absoluto, tenemos la relación

$$n_0 = \int_0^{E_F} g_0 dE = g_0 E_F \quad [I.2]$$

que, usando la [Ec.1], nos permite expresar el nivel de Fermi de la forma

$$E_F = \frac{\hbar^2 n_0 \pi}{m^*} = \frac{n_0}{g_0} \quad [I.3]$$

Es importante resaltar la inevitable presencia de impurezas ionizadas positivas en cualquier S2D real, que dan origen a un campo eléctrico,  $\vec{E}^u$ , que llamaremos campo eléctrico de la unión, [Fig.3], y cuya dirección es perpendicular al S2D.

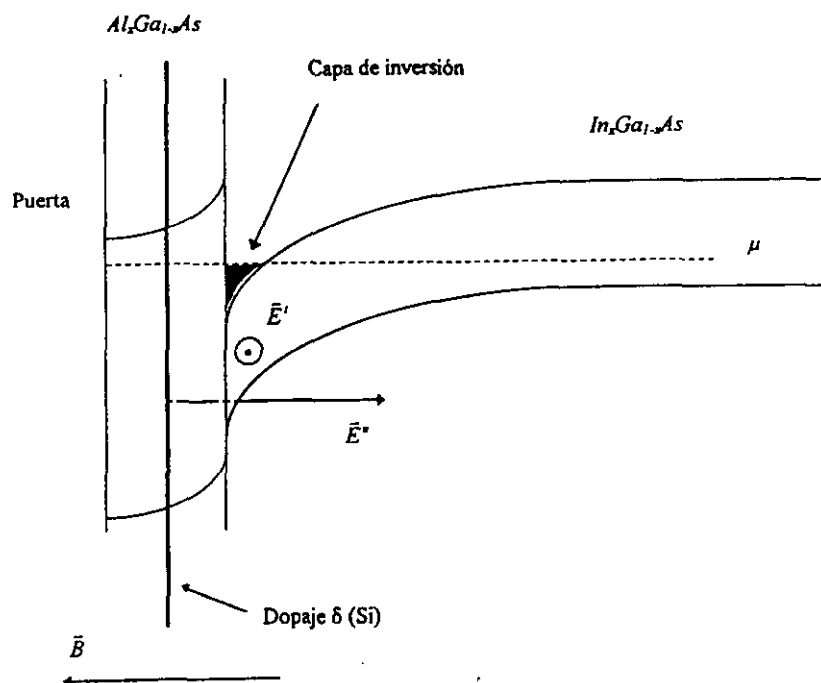


Figura 3: Conjunto de campos externos e internos que actúan sobre la capa de inversión de una heteroestructura semiconductor. Indicamos también la dirección de aplicación del campo magnético,  $\vec{B}$ .  $\vec{E}'$  es el campo de transporte cuyo significado discutiremos en la [Parte II].

Estas impurezas están localizadas siempre en una región más o menos próxima al S2D aunque, como hemos mencionado para el caso del *HEMT*, separadas espacialmente del mismo. Hemos visto que el dopaje puede ser de volumen o de tipo  $\delta$ . Sin embargo, aunque el dopaje sea en volumen, asumiremos que todas las impurezas ionizadas están localizadas en un plano equivalente, paralelo al S2D.

Un parámetro fundamental en el estudio del EHC será el de la distancia media entre impurezas ionizadas que pasamos a evaluar a continuación.

Llamemos  $Q(r)dr$  a la probabilidad de encontrar un ión de impureza vecino más próximo entre las distancias  $r$  y  $r+dr$ . Si denotamos por  $P(r)$  la probabilidad de que haya un ión vecino más cerca a una distancia  $r$ , entonces, se sigue la relación

$$Q(r)dr = P(r)2\pi r dr N_i$$

donde con  $N_i$  representaremos la densidad promedio de impurezas. Estas dos magnitudes están relacionadas por la ecuación

$$P(r) = 1 - \int_0^r Q(r)dr$$

Operando sobre las dos ecuaciones anteriores, podemos obtener

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{Q(r)}{2\pi N_I} \right) = -Q(r)$$

que integrando, nos lleva a

$$Q(r) = 2\pi N_I \exp\{-\pi r^2 N_I\}$$

en el que hemos usado la condición frontera  $Q(r)=0$  cuando  $r=0$ . La distancia media entre impurezas, que llamaremos a partir de este momento *longitud de correlación de impurezas*, vendrá dada entonces por la ecuación

$$L_i = \int_0^\infty r Q(r) dr = 2\pi N_I \int_0^\infty r^2 \exp\{-\pi r^2 N_I\} dr$$

Haciendo un cambio de variable es inmediato calcular esta integral, de forma que obtenemos

$$L_i = \frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi N_I}}$$

siendo  $\Gamma(3/2)$  la función gamma de Euler de índice 3/2. Tomando su valor de las tablas, la ecuación anterior puede simplificarse como sigue, [Ridley,92]:

$$L_i = \frac{1}{2} N_I^{-1/2}$$

Es físicamente razonable suponer que el número de impurezas ionizadas se corresponde con el de la concentración de electrones en el GE2D. De manera que si la densidad de electrones de éste es del orden de  $3 \times 10^{15} m^{-2}$  obtenemos una distancia media entre impurezas ionizadas, o longitud de correlación, de unos 100Å.



## II

### EFFECTOS GALVANOMAGNÉTICOS CLÁSICOS EN SISTEMAS *CUASI*-BIDIMENSIONALES

En esta Parte estudiaremos el régimen semiclásico de la magnetoconductividad transversa del sistema *cuasi*-bidimensional (S2D), es decir, con el campo magnético aplicado perpendicularmente al mismo. El conocimiento tanto de la componente diagonal como no diagonal o Hall de la magnetoconductividad transversa nos permitirá establecer los parámetros que determinan la respuesta eléctrica de un gas de electrones *cuasi*-bidimensional (GE2D) en presencia de un campo magnético, lo que tendrá especial interés para el desarrollo posterior de nuestro modelo. Por último, determinaremos el rango de aplicabilidad de las condiciones semiclásicas.

A lo largo de la memoria supondremos válida la aproximación de respuesta lineal, que considera la respuesta macroscópica de un sistema electrónico a la aplicación simultánea de un campo eléctrico y un campo magnético uniformes. La densidad de corriente estará por la ecuación fenomenológica

$$\vec{J} = \overline{\sigma}(\vec{B}) \vec{E}' \quad [\text{II.1}]$$

donde  $\vec{E}'$  representa el campo eléctrico responsable de los efectos de transporte en el S2D (véase [Fig.4]), y el factor de proporcionalidad,  $\overline{\sigma}(\vec{B})$ , es el tensor de segundo orden de la magnetoconductividad transversa. La ecuación anterior expresada en componentes tiene la forma general

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma_{xx} E'_x + \sigma_{xy} E'_y \\ J_y &= \sigma_{yx} E'_x + \sigma_{yy} E'_y \end{aligned} \quad [\text{II.2}]$$

En la [Fig.4] damos un esquema de las diferentes magnitudes que aparecen en esta ecuación sobre una muestra en forma de barra Hall, (véase el [Apartado 3] de la [Parte V])

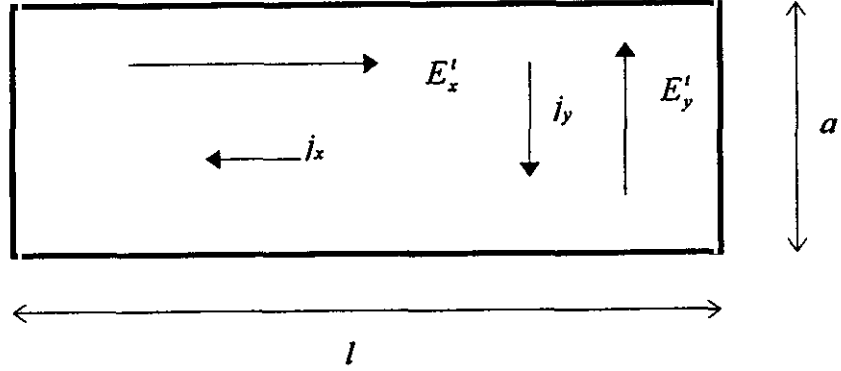


Figura 4: Esquema de las diferentes magnitudes que aparecen en la [Ec.2] sobre una muestra con la geometría más usual de los S2D.

A la vista de la [Ec.2], en principio necesitaríamos conocer cuatro coeficientes de magnetotransporte. Ahora bien, utilizando el teorema de Onsager, [Callèn,81], [Huang,87], que establece que todas las leyes de la física permanecen inalteradas si la variable tiempo  $t$  se reemplaza por su opuesto  $-t$ , y simultáneamente, el campo magnético  $\vec{B}$  por su inverso  $-\vec{B}$  (postulado de la simetría de las leyes físicas microscópicas en el tiempo), los términos cruzados de acoplamiento han de verificar las relaciones siguientes

$$\sigma_{xy}(\vec{B}) = \sigma_{yx}(-\vec{B}) = -\sigma_{yx}(\vec{B}) \quad [\text{II.3}]$$

Por otro lado, si suponemos simetría cúbica en el S2D, podemos establecer una relación adicional para los términos diagonales

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \quad [\text{II.4}]$$

Así pues, combinando estas dos ecuaciones con la [Ec.2], llegamos a la siguiente relación para la densidad de corriente

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma_{xx} E'_x + \sigma_{xy} E'_y \\ J_y &= -\sigma_{xy} E'_x + \sigma_{xx} E'_y \end{aligned} \quad [\text{II.5}]$$

donde el término  $\sigma_{xx}$  es la componente diagonal y  $\sigma_{xy}$  la Hall.



Invirtiendo el tensor de magnetoconductividad transversa obtenemos la ecuación para el campo eléctrico de transporte en función de la densidad de corriente

$$\bar{E}' = \bar{\rho}(\bar{B})\bar{J}$$

donde  $\bar{\rho}$  es el tensor de magnetorresistividad. De forma explícita, la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} E'_x &= \rho_{xx}J_x - \rho_{xy}J_y \\ E'_y &= \rho_{xy}J_x + \rho_{xx}J_y \end{aligned} \quad [\text{II.6}]$$

en la que ya se ha tenido en consideración las ecuaciones equivalentes a la [Ec.3] y la [Ec.4] para reducir el número de posibles coeficientes de magnetorresistividad.  $\rho_{xx}$  y  $\rho_{xy}$  son las componentes diagonal y no diagonal de la magnetorresistividad transversa.

De las [Ec.5] y [Ec.6] es inmediato establecer las relaciones básicas entre los coeficientes cinéticos de magnetoconductividad y magnetorresistividad que estarán dadas por el conjunto de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \end{aligned} \quad [\text{II.7}]$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \\ \rho_{xy} &= -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \end{aligned}$$

A raíz de las medidas *no locales* de la magnetorresistividad en los últimos años se ha reavivado la discusión sobre la validez de la [Ec.6] en relación a la dependencia de la misma con la geometría en la disposición de los contactos sobre el S2D. Wick, [Wick,54], [Wakabayashi,78,1], estudió sistemáticamente la relación entre el vector de campo eléctrico y de densidad de corriente para una disposición arbitraria de contactos sobre una muestra rectangular. Así, introdujo lo que denominó parámetros de la impedancia,  $Z_{xx}$  y  $Z_{xy}$ , que eran funciones del cociente,  $l/a$ , de las dimensiones del S2D. De modo que, en lugar de la [Ec.6], propuso el siguiente conjunto de ecuaciones para describir el campo eléctrico de transporte

$$\begin{aligned} E'_x &= \rho_{xx}Z_{xx}J_x - \rho_{xx}Z_{xy}J_y \\ E'_y &= \rho_{xx}Z_{xy}J_x + \rho_{xx}Z_{xx}J_y \end{aligned}$$

Relaciones con las que puede abordarse el estudio de los efectos de no localidad en las medidas de la magnetorresistividad, [McEuen,90], [Tsukagoshi,91], [Takaoka,92,1].

Al aplicar simultáneamente a un cristal un campo eléctrico y otro magnético, sobre cada electrón con velocidad  $\vec{v}$  actúa la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = -e(\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [\text{II.8}]$$

Si analizamos la forma que tiene el término correspondiente a la fuerza magnética, se deduce que el campo magnético no cambia la energía del electrón. Es más, puesto que la interacción del momento magnético de espín con el campo magnético uniforme no aparece en la expresión de esta fuerza, concluimos que el estado de espín del electrón no tiene ninguna consecuencia en el movimiento del mismo.

Así pues, el movimiento de un electrón estará descrito por las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B})$$

deducida directamente de la fuerza de Lorentz, [Ec.8], y

$$\frac{dE}{dt} = -e\vec{v} \cdot \vec{E}'$$

que es la ecuación de la variación de energía del sistema, y donde no aparece el campo magnético ya que, como acabamos de ver no modifica la energía del electrón. Sin embargo, debido a la presencia del campo eléctrico de transporte la energía no es constante en el tiempo.

Estas ecuaciones de movimiento se simplifican efectuando una transformación de Lorentz apropiada. Supongamos que  $|\vec{E}'| < |\vec{B}|$ , y hagamos una transformación del sistema laboratorio,  $K$ , y donde el electrón tiene una velocidad  $\vec{v}$ , a otro sistema,  $K'$ , que se mueve respecto al anterior con la siguiente velocidad relativa, [Jackson,75]:

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E}' \times \vec{B}}{B^2}$$

Si llamamos  $\vec{v}'$  a la velocidad del electrón respecto al sistema  $K'$ , podemos escribir

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_D$$

Por otro lado, puesto que los campos son uniformes se tiene la relación

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

de donde la ecuación del movimiento en el sistema  $K'$  estaría dada por

$$m^* \frac{d\vec{v}'}{dt} = -e\vec{v}' \times \vec{B}$$

Con  $m^*$  representamos la masa efectiva de los electrones que nos permite tener en consideración su interacción con la red cristalina, [Apéndice 2]. En este sistema de referencia el movimiento del electrón se debe únicamente al campo magnético, describiendo una circunferencia de radio, [Jackson, 75]:

$$r = \frac{m^* v'}{eB}$$

A esta órbitas, llamadas *órbitas ciclotrón*, podemos asignarle una frecuencia angular,  $\omega_c$ , dada por la [Ec.22].

Así pues, el movimiento de un electrón en presencia de un campo magnético y otro eléctrico, uniformes y mutuamente perpendiculares, es la superposición de dos partes: un movimiento de deriva en la dirección del producto de vectores  $\vec{E}' \times \vec{B}$ , perpendicular a  $\vec{B}$ , y un movimiento circular en torno al eje definido por la dirección del campo magnético, con velocidad  $\vec{v}'$  en lugar de la velocidad total  $\vec{v}$ .

Utilizando una imagen clásica, el movimiento que describe un electrón como consecuencia de la acción de los campos externos, se ve interrumpido por las colisiones. Este fenómeno, que se caracteriza por el tiempo entre colisiones,  $\tau$ , está determinado por los defectos estructurales de la muestra, la interacción electrón-electrón y, sobre todo a temperaturas elevadas, por los fonones del cristal. Su significado físico lo analizaremos con todo detalle al profundizar en los aspectos cuánticos de los fenómenos de transporte ([Apartado 3.3], [Parte IV]).

El asignar una frecuencia ciclotrón al movimiento orbital permite definir claramente el límite clásico del movimiento del electrón, determinado por la ecuación

$$\omega_c \tau \ll 1$$

cuyo significado físico es el siguiente: el tiempo entre colisiones es menor que el periodo de rotación del electrón bajo la acción del campo magnético; de modo que el electrón en su movimiento no puede efectuar órbitas completas y los procesos de relajación llegan a ser muy importantes. Esto permite hacer un tratamiento estadístico del problema a partir de la ecuación de Boltzman, [Apéndice 4].

En lo que viene a continuación resolveremos la ecuación de Boltzman para las condiciones semiclásicas utilizando la aproximación de tiempo de relajación, [Apéndice 4], que establece que no hay dependencia del tiempo de relajación con los campos externos aplicados. Supondremos además

que la función de distribución total  $f_{\vec{k}}$  sólo tiene dependencia con el vector de onda del electrón, es decir, no consideramos su dependencia con el vector posición en el espacio real,  $\vec{r}$ , asociado a gradientes de concentración de electrones y gradientes de temperatura. En estas condiciones podemos escribir la ecuación de Boltzman de la siguiente forma

$$\frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}} = - \frac{f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0}{\tau(\vec{k})}$$

donde  $f_{\vec{k}}^0$  es la función de distribución de equilibrio. Al introducir una dependencia con el vector de onda en el tiempo de relajación, incluimos las posibles anisotropías del mismo sobre la línea de Fermi, el equivalente en dos dimensiones a la superficie de Fermi de los sistemas electrónicos tridimensionales. Por otro lado, la aproximación de tiempo de relajación supone que la desviación de la distribución de electrones respecto al estado de equilibrio es pequeña, y su variación debida a las colisiones, proporcional a la magnitud de la desviación respecto de la distribución de equilibrio, con un factor de proporcionalidad que es lo que hemos llamado tiempo de relajación, [Apéndice 4].

Conviene tener presente que el operador gradiente que aparece en la ecuación anterior, al estar considerando S2D, está dado por la siguiente expresión

$$\nabla_{\vec{k}} = \left( \frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y} \right)$$

Sabemos que para los sistemas degenerados, la función de distribución de equilibrio está dada por la función de Fermi-Dirac

$$f_{\vec{k}}^0 = \frac{1}{1 + \exp\left\{ \frac{E(\vec{k}) - E_F}{kT} \right\}} \quad [\text{II.9}]$$

donde  $E_F$  representa la energía correspondiente al nivel de Fermi,  $T$  la temperatura del sistema y  $E(\vec{k})$  la energía de los electrones medida desde el fondo de la banda de conducción.

Si conocemos la función de distribución de desequilibrio

$$f_{\vec{k}}^1 = f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0$$

la densidad de corriente en el cristal está dada en la teoría de la respuesta lineal de Kubo, [Kubo, 57, 1], de la forma

$$\vec{J} = \frac{e}{2\pi^2} \int \vec{v}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^1 d^2 \vec{k} \quad [\text{II.10}]$$

donde se ha tenido en cuenta la degeneración de espín. En esta ecuación el término

$$\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \quad [\text{II.11}]$$

es la velocidad de grupo del electrón en el cristal, [Apéndice 2]. Al descomponer de esta forma la función de distribución total,  $f_{\vec{k}}$ , se considera el teorema de Bloch para la densidad de corriente

$$\int \vec{v}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^0 d^2 \vec{k} = 0$$

Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^0 = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) = \vec{v}(\vec{k}) \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E}$$

reducimos la ecuación de Boltzman a

$$\vec{F} \cdot \vec{v}(\vec{k}) \left( -\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \right) = \frac{f_{\vec{k}}^1}{\tau(\vec{k})} + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^1 \quad [\text{II.12}]$$

Al estar interesados en la respuesta lineal del cristal a campos eléctricos de transporte pequeños, podemos despreciar en primer orden su efecto sobre la variación de la función de distribución, es decir, el término

$$\frac{e}{\hbar} \vec{E}^t \cdot \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^1$$

que sería del orden de  $\vec{E}^2$ , cuadrático en el campo eléctrico, y correspondería a desviaciones de la ley de Ohm. Así, en el segundo miembro de la [Ec.12] sólo ha de figurar el término correspondiente al campo magnético. Esta aproximación está apoyada por el hecho de que la fuerza que actúa sobre un electrón con una determinada velocidad de Fermi en un campo magnético pequeño es mayor que la fuerza de Coulomb debida al campo eléctrico de transporte.

Considerando lo anterior y la identidad vectorial  $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ , llegamos a la ecuación de Boltzman linealizada respecto del campo eléctrico

$$(\vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{E}^t) \left( -\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \right) = \frac{1}{\hbar} (\vec{v}(\vec{k}) \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^1 - \frac{f_{\vec{k}}^1}{e\tau(\vec{k})} \quad [\text{II.13}]$$

Es importante destacar que el campo eléctrico de transporte juega en esta ecuación un papel completamente diferente al del campo magnético, ya que corresponde a un término de arrastre equilibrado por los procesos de colisión. Sin embargo, el campo magnético no tiene consecuencias sobre la función de distribución de equilibrio, y su efecto se traduce únicamente en variar la dirección de la velocidad de cada electrón sin modificar su módulo. Dado que el término de campo magnético cambia la dirección de movimiento de los electrones lo incluimos en el mismo lado de la igualdad que ocupa el término de colisión, contribuyendo de esta forma a la parte de desequilibrio de la función de

distribución, es decir, al término  $f_k^1$ , actuando como un dispositivo de dispersión elástica para los electrones.

En primer lugar, calcularemos el tensor de conductividad sin campo magnético. Posteriormente, la forma de la solución que obtengamos nos servirá para encontrar una función que permita resolver el problema con campo magnético aplicado. Así pues, haciendo en la [Ec.13]  $\vec{B} = 0$ , la solución general estará dada por, [Kubo,69,2], [Dávídov,81]:

$$f_k^1 = -e\tau(\vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{E}') \left( -\frac{\partial f_k^0}{\partial \mathcal{E}} \right) \quad [\text{II.14}]$$

Sin ninguna pérdida de generalidad supondremos, a partir de este momento, que el tiempo de relajación no depende del vector de onda del espacio recíproco. Sustituyendo ahora la función anterior en la [Ec.10], hallamos la densidad de corriente

$$\vec{J} = \frac{e\tau}{2\pi^2} \int \vec{v}(\vec{k}) (\vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{E}') \left( -\frac{\partial f_k^0}{\partial \mathcal{E}} \right) d^2 \vec{k} \quad [\text{II.15}]$$

que, comparándola con la [Ec.1], nos lleva a la expresión general del tensor de conductividad del cristal en ausencia de campo magnético

$$\sigma = \frac{e\tau}{2\pi^2} \int (\vec{v}(\vec{k}) \otimes \vec{v}(\vec{k})) \left( -\frac{\partial f_k^0}{\partial \mathcal{E}} \right) d^2 \vec{k} \quad [\text{II.16}]$$

$(\vec{v}(\vec{k}) \otimes \vec{v}(\vec{k}))$  es el tensor formado por el producto diádico de dos vectores, es decir

$$(\vec{v}(\vec{k}) \otimes \vec{v}(\vec{k}))_{ik} = v_i v_k$$

En los sistemas degenerados a bajas temperaturas la derivada de la función de distribución viene dada aproximadamente por la delta de Dirac en torno a la energía de Fermi. Integrando respecto a la energía sobre la *línea* isoenergética de Fermi obtenemos

$$\sigma = \frac{e^2 \tau}{2\pi^2 \hbar} \oint_{L_F} \frac{(\vec{v}(\vec{k}) \otimes \vec{v}(\vec{k}))}{|\vec{v}(\vec{k})|} dL_F \quad [\text{II.17}]$$

donde  $dL_F$  es un elemento diferencial de la *línea* de Fermi. Para llegar a la ecuación anterior hemos usado la expresión de la velocidad de grupo del electrón en el S2D, [Apéndice 2]. El tomar la integral sobre la *línea* de Fermi implica, desde un punto de vista físico, que el tensor de conductividad depende únicamente de las propiedades de los electrones de dicha línea. Así, por ejemplo, en un sistema isótropo tenemos la relación

$$\frac{(\vec{v}(\vec{k}) \otimes \vec{v}(\vec{k}))_{ik}}{|\vec{v}(\vec{k})|} = \frac{1}{2} |\vec{v}| \delta_{ik}$$

con lo que el tensor de conductividad degenera en un escalar de la forma

$$\sigma = \frac{e^2 \tau}{4\pi^2 \hbar} \oint_{L_F} |\vec{v}(\vec{k})| dL_F \quad [\text{II.18}]$$

Para electrones *cuasi*-libres en un S2D la relación de dispersión de la energía está dada por

$$E = E_i + \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) \quad [\text{II.19}]$$

donde  $E_i$  es la energía correspondiente a la subbanda, [Parte I]. De modo que la velocidad de grupo del electrón en el cristal será entonces, [Ec.11]:

$$\vec{v}(\vec{k}) = \hbar \vec{k} / m^*$$

Efectuando la integral de la [Ec.18], obtenemos la *fórmula clásica de Drude* para la conductividad de un sistema electrónico *cuasi*-libre en ausencia de campo magnético

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_0 \tau}{m^*} = e n_0 \mu \quad [\text{II.20}]$$

siendo  $n_0$  la densidad total de electrones por unidad de área,  $\tau$  el tiempo de relajación a campo magnético nulo y  $\mu$  la movilidad de los electrones, dada por

$$\mu = \frac{e \tau}{m^*}$$

Una vez calculada la conductividad a campo magnético nulo, buscaremos la solución de la ecuación de Boltzman con campo magnético aplicado. Tomaremos una función prueba del tipo de la [Ec.14], [Kubo,69,2], [Dávídov,81]:

$$f_{\vec{k}}^1 = -e \tau (\vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{A}) \left( -\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \right) \quad [\text{II.21}]$$

donde  $\vec{A}$  es un vector a determinar. Derivando obtenemos

$$\frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^1 = -\frac{e \tau}{m^*} \vec{A} \left( \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \right)$$

que si sustituimos en la ecuación de Boltzman, [Ec.13], nos permite determinar el campo eléctrico de transporte, [Dávídov,81]:

$$\vec{E}^t = \vec{A} - \frac{e \tau}{m^*} (\vec{B} \times \vec{A})$$

de donde deducimos el vector  $\vec{A}$ , que será

$$\vec{A} = \frac{\left( \vec{E}' + \frac{e\tau}{m^*} [\vec{B} \times \vec{E}'] \right)}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

siendo  $\omega_c$  la frecuencia ciclotrón, dada por

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad [\text{II.22}]$$

La extensión de la ley de Ohm para un S2D en el caso de que tengamos aplicados un campo eléctrico y otro magnético mutuamente perpendiculares es

$$\vec{J} = \overline{\sigma} \vec{A}$$

o de forma explícita

$$\vec{J} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \left( \vec{E}' + \frac{e\tau}{m^*} [\vec{B} \times \vec{E}'] \right) \quad [\text{II.23}]$$

donde  $\sigma_0$  es la conductividad a campo magnético nulo para un sistema de electrones *cuasi*-libres, [Ec.17]. Si comparamos esta expresión con la [Ec.2], obtenemos para el tensor de magnetoconductividad de un S2D isótropo con un campo magnético aplicado en la dirección  $z$ ,  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , la ecuación

$$\overline{\sigma}(\vec{B}) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{e\tau}{m^*} B \\ \frac{e\tau}{m^*} B & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{II.24}]$$

Invirtiendo este tensor, obtenemos el tensor de magnetorresistividad

$$\overline{\rho}(\vec{B}) = \begin{pmatrix} \rho_0 & \frac{B}{en_0} \\ -\frac{B}{en_0} & \rho_0 \end{pmatrix} \quad [\text{II.25}]$$

donde

$$\rho_0 = \frac{m^*}{e^2 n_0 \tau} \quad [\text{II.26}]$$

es la resistividad a campo magnético nulo.

De la [Ec.24] deducimos que la magnetoconductividad diagonal clásica está dada por

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

(Destacaremos con un superíndice "0" las magnitudes clásicas). Reagrupando términos, puede escribirse de una forma mucho más adecuada para las discusiones de la [Parte IV]:



$$\sigma_{xx}^0 = \frac{en_0}{\omega_c \tau B} \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad [\text{II.27}]$$

En el límite de altos campos magnéticos, es decir, cuando  $\omega_c \tau \gg 1$ , suponiendo válida la expresión anterior, el segundo factor se hace aproximadamente uno dando

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{en_0}{\omega_c \tau B} \quad [\text{II.28}]$$

Hay que resaltar que mientras a campo magnético nulo la conductividad es proporcional a  $\tau$ , [Ec.20], la magnetoconductividad diagonal tiene una dependencia en  $1/\tau$  a altos campos magnéticos.

Para el término no diagonal del tensor de magnetoconductividad, [Ec.24], obtenemos

$$\sigma_{xy}^0 = -\sigma_0 \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

que podemos escribir

$$\sigma_{xy}^0 = -\frac{en_0}{B} \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad [\text{II.29}]$$

reduciéndose en el límite de altos campos magnéticos a

$$\sigma_{xy}^0 = -\frac{en_0}{B} \quad [\text{II.30}]$$

Hay que resaltar que los parámetros de los que depende la [Ec.27] y la [Ec.29], y que determinan la respuesta eléctrica de un S2D en presencia de un campo magnético dentro del régimen lineal, es decir, siempre y cuando no se consideren relaciones no lineales entre la densidad de corriente y campo eléctrico, [Riess,93], [Cage,83], son la densidad de electrones por unidad de área,  $n_0$ , y el tiempo de relajación,  $\tau$ . Esta conclusión nos será de gran ayuda a la hora de abordar el estudio de la respuesta eléctrica del S2D en el régimen cuántico, (véase la [Parte IV]).

Antes de finalizar estableceremos los límites de validez de la aproximación semiclásica que están determinados por los límites de aplicabilidad de la ecuación de Boltzman, válida en condiciones semiclásicas, es decir, siempre y cuando el concepto de trayectoria esté bien definido y los estados electrónicos puedan representarse por puntos en el espacio fásico. Esto supone que el momento lineal (los vectores de onda) y la coordenada pueden aparecer en la función de distribución y determinarse simultáneamente.

Sabemos que las propiedades de un sistema libre pueden estudiarse en el marco de la mecánica clásica si la longitud de onda de de Broglie de los electrones,  $\lambda_e$ , es pequeña comparada

con la dimensión  $L$  del problema particular considerado, esto es,  $\lambda_e \ll L$ . Sin embargo, si el sistema de electrones no es libre y actúa sobre él una fuerza  $F$ , la condición semiclásica está descrita por, [Landau, 83, 1], [Yndurain, 88]:

$$\left| \frac{d\lambda_e}{dx} \right| \ll 1 \quad [\text{II.31}]$$

que se deduce directamente de la aproximación WKB. De manera que la longitud de onda debe variar poco a lo largo de la distancia característica del sistema. Llamando  $p$  al momento lineal del electrón, su longitud de onda asociada está determinada por la relación cuántica

$$\lambda_e = \hbar/p$$

Necesitaremos, además, hacer uso de la ecuación clásica

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{2m(E-U)} = -\frac{m}{p} \frac{dU}{dx} = \frac{m|F|}{p}$$

donde  $F$  es la fuerza que actúa sobre el electrón debido al campo exterior. Así, en el caso de un electrón en un cristal, podemos resumir la condición semiclásica expresada en la [Ec.31] por

$$\frac{m^* \hbar}{p^3} |F| \ll 1$$

Cuando  $p^2 \approx m^* \bar{E}$ , siendo  $\bar{E}$  el valor medio de la energía del electrón, esta condición de aplicabilidad de la ecuación de Boltzman puede simplificarse de la forma siguiente

$$\lambda_e |F| \ll \bar{E} \quad [\text{II.32}]$$

es decir, el aumento de energía del electrón, debido a la acción sobre él de la fuerza aplicada en una distancia  $\lambda_e$ , debe ser mucho menor que la energía media del electrón,  $\bar{E}$ . En nuestro caso, al estar interesados en sistemas electrónicos degenerados, la energía media del electrón corresponde aproximadamente a la energía de Fermi,  $E_F$ .

Una vez establecida la relación general de validez de la ecuación de Boltzman, podemos analizar las limitaciones que le impone en particular el campo magnético. Sustituyendo el término de interacción magnética incluido en la expresión de la fuerza de Lorentz, [Ec.8], en la condición general dada por la [Ec.32], el criterio de aplicabilidad estará dado en este caso por la relación

$$\frac{\hbar e B}{m^*} = \hbar \omega_c \ll E_F$$

en la que hemos usado la [Ec.22]. Operando, podemos simplificarla aún más

$$R_L \gg \lambda_e \quad [\text{II.33}]$$

donde  $R_L$  es el radio de la órbita semiclásica del electrón, el radio de Larmor clásico, dado por la ecuación

$$R_L = \frac{m^* v}{eB} = \frac{v}{\omega_c} \quad [\text{II.34}]$$

siendo  $v$  el módulo de la velocidad del electrón y  $B$ , como siempre, el campo magnético externo aplicado. Para los sistemas degenerados  $\lambda_e$  es la longitud de onda del electrón al nivel de Fermi, por lo que es posible establecer la igualdad

$$\lambda_e = \lambda_F \approx \frac{\hbar}{m^* v_F}$$

quedando la [Ec.33] de la forma siguiente

$$R_L \gg \lambda_F$$

Es decir, la ecuación de Boltzman es aplicable para campos magnéticos en los que la longitud de onda de Fermi del electrón es mucho menor que el radio de Larmor. En esta región se puede utilizar para la determinación de los coeficientes cinéticos de magnetotransporte. Sin embargo, a medida que variamos el campo magnético, el radio de Larmor clásico disminuye llegando a tener un valor para el que la condición anterior se hace inaplicable. De aquí partiremos al estudiar el transporte en el régimen cuántico, que será el objeto de la [Parte IV].

Veamos por último el criterio de aplicabilidad de la ecuación de Boltzman para el campo eléctrico de transporte. En este caso la [Ec.32] se reduce a la relación

$$eE' \lambda_e \ll E_F \quad [\text{II.35}]$$

Si describimos la longitud de onda del electrón en función del momento lineal y hacemos uso de la proporcionalidad entre el campo eléctrico y la velocidad media de los electrones en el cristal,  $E' = \bar{v}/\mu$ , donde  $\mu$  es la movilidad del electrón, obtenemos

$$\frac{e\hbar}{E_F m^*} \ll \mu$$

Sustituyendo el valor del nivel de Fermi para un S2D, [Ec.I.3], el criterio general de aplicabilidad de la ecuación de Boltzman para el campo eléctrico de transporte, estará dado por

$$\frac{2e}{\hbar n_0} \ll \mu \quad [\text{II.36}]$$

En los S2D de movilidad media,  $25000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ , y con una densidad de electrones típica del orden de  $8 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , es inmediato comprobar que para los campos eléctricos utilizados habitualmente en las medidas de transporte estamos en condiciones semiclásicas, donde la ecuación de Boltzman es aplicable.



# III

## DENSIDAD DE ESTADOS DE UN SISTEMA CUASI-BIDIMENSIONAL EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO

En la [Parte I] determinamos los posibles niveles de energía del electrón debido al potencial de confinamiento en la dirección  $z$ , las subbandas  $E_i$ . En esta Parte nos proponemos estudiar los términos de la energía correspondiente a las direcciones  $x$  e  $y$  en presencia de un campo magnético. Finalizaremos obteniendo una expresión general para la densidad de estados del S2D.

En el [Apéndice 8] hacemos un análisis detallado de todos los términos del hamiltoniano completo de un S2D, que es de la forma

$$H_{total} = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) + H_s + U(\vec{r}) + H_{e-o} + H_{ds} + e\phi + H_{e-e}$$

donde para obtener el término cinético  $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A}$ , con  $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ , y  $\vec{A}$  el potencial vector, se ha utilizado el *principio de correspondencia* y el *postulado de sustitución mínima*, [Jackson,75]. El resto de términos corresponden al potencial de la red, el término de acoplamiento del espín con el campo magnético, el potencial electrostático de la unión debido a las impurezas ionizadas, [Parte I], el de espín-órbita, el debido al campo eléctrico de transporte, [Parte II] y el de interacción electrón-electrón.

En todo lo que viene a continuación, estudiaremos la contribución de los seis primeros términos sobre la energía del electrón, mientras que el efecto de  $e\phi$  y  $H_{e-e}$ , lo analizaremos en el [Apartado 3.3] de la [Parte IV].

Comenzaremos con el término más importante de este hamiltoniano, el término cinético, y en todo momento supondremos válida la aproximación de masa efectiva, [Apéndice 8], que afirma que es posible estudiar de manera general el problema de un electrón del cristal sometido a la acción de un campo magnético uniforme, efectuando el siguiente cambio en el hamiltoniano

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) \Rightarrow \frac{1}{2m^*}(\vec{p} + e\vec{A})^2 \quad [\text{III.1}]$$

siempre y cuando se tenga una variación lenta del potencial vector en la celda unidad del cristal, (en el [Apéndice 8] justificamos esta aproximación incluso para campos magnéticos elevados). Así, la ecuación de Schrödinger que resolveremos inicialmente es

$$\frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m^*} \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad [\text{III.2}]$$

A lo largo de la memoria vamos a utilizar el *gauge simétrico*, en el que las autofunciones del hamiltoniano son también funciones propias del momento angular orbital,  $\vec{L}$ . Por definición, en este *gauge*, el potencial vector tiene la forma

$$\vec{A} = \left( -B\frac{y}{2}, B\frac{x}{2} \right) \quad [\text{III.3}]$$

con lo que el término cinético del hamiltoniano será, [Apéndice 8]:

$$\vec{p}^2 + e(\vec{B} \cdot \vec{L}) + \frac{e^2}{4} \vec{B}^2 \vec{r}^2 \quad [\text{III.4}]$$

De aquí podemos concluir que cada electrón induce el momento magnético

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2m^*} \vec{L} \quad [\text{III.5}]$$

que nos permitirá establecer una conexión inmediata con la imanación.

Resolviendo la [Ec.2] encontramos que sus autovalores están dados por, [Landau,83,2]:

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad [\text{III.6}]$$

llamados niveles de Landau, con  $n=0,1,2,3,\dots$ , y donde  $\omega_c$  es la frecuencia ciclotrón cuyo sentido físico discutimos en la [Parte II], y está dada por la expresión

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad [\text{III.7}]$$

Las autofunciones correspondientes a estos niveles de Landau en el *gauge* simétrico, están dadas por, [Butcher,93]:

$$\psi_{n,m}(\vec{r}') = A_{n,m} (x' - iy')^m \exp\left(-\frac{r'^2}{4}\right) L_n^m\left(\frac{r'^2}{2}\right) \quad [\text{III.8}]$$

donde  $x' = x/R$  y  $y' = y/R$ , y  $R$  dada por la [Ec.12].  $L_n^m$  representa los polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^m(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m} L_n(\alpha)$$

con

$$L_n(\alpha) = \exp\{\alpha\} \frac{d^n}{d\alpha^n} (\alpha^n \exp\{-\alpha\})$$

El resto de factores son

$$A_{n,m} = \left[ 2^m \frac{(m+n)!}{n!} \right]$$

y

$$r'^2 = x'^2 + y'^2$$

Podemos comprobar que estas autofunciones lo son también del operador momento angular orbital, cuyos autovalores son  $m\hbar$ , siendo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  el número cuántico magnético, [Davidov,81], responsable de la degeneración de los niveles de Landau y que es independiente del campo magnético.

Para la discusión sobre otros modelos del EHC que haremos en el [Apartado 6] de la [Parte IV], nos interesará conocer la solución de la ecuación de Schrödinger con otra elección de *gauge*, el *gauge* de Landau, utilizado por Laughlin en sus argumentos sobre el EHC, puesto que es la elección más apropiada para la geometría de su experimento *gedanken*, [Laughlin,81,1], [Laughlin,82,2]. Este *gauge* está definido por la siguiente expresión para el potencial vectorial

$$\vec{A} = (0, Bx) \quad [\text{III.9}]$$

Con esta elección puede construirse una base ortonormal de funciones de onda que presenta de forma explícita la invariancia traslacional paralela a una de las direcciones espaciales del S2D, por ejemplo, la dirección  $y$ , (véase la [Fig.5]). En este caso los autovalores siguen siendo los mismos niveles de Landau representados por la [Ec.6] y que obtuvimos para el *gauge* simétrico, aunque las funciones propias son ahora, salvo un factor de normalización, [Yndurain,88], [Landau,83,2]:

$$\psi_{n,k}(\vec{r}') \approx \exp\{iky'\} H_n(x'+k) \exp\{-(x'+k)^2\} \quad [\text{III.10}]$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite, solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional y  $x'$  e  $y'$  tienen el mismo significado que en la [Ec.8].

Para aclarar su significado geométrico, en la [Fig.5] representamos la forma de cada una de las funciones de onda de la ecuación de Schrödinger para los *gauge* descritos anteriormente.

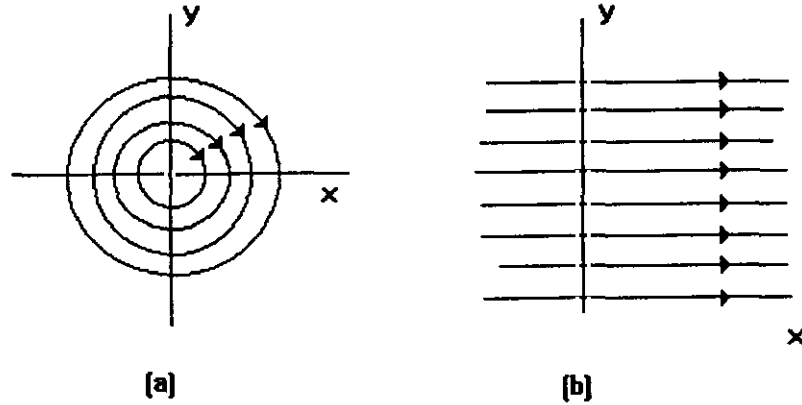


Figura 5: (a)*gauge* simétrico. (b)*gauge* de Landau.

Como hemos visto, las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el *gauge* *simétrico* son autofunciones del momento angular orbital, lo que nos permite extender de manera coherente la idea de órbita clásica para el electrón y definir un radio a semejanza del radio de Larmor clásico, [Ec.II.34]. Así, definiremos el radio de Larmor generalizado a través de la ecuación

$$R_L = \left( \frac{2E}{\hbar\omega_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\hbar}{eB} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2E}{\hbar\omega_c} \right)^{\frac{1}{2}} R \quad [\text{III.11}]$$

donde con  $R$  representamos la *longitud magnética*

$$R = \left( \frac{\hbar}{eB} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{256.7}{B^{\frac{1}{2}}} \quad [\text{III.12}]$$

expresada en angstroms (Å). Es inmediato comprobar que para el caso clásico, con la definición que acabamos de dar para el radio de Larmor, se recupera la expresión clásica, [Ec.II.34]. Sin embargo, en el caso cuántico, debido a la cuantización de la órbita del ciclotrón, será

$$R_L = (2n+1)^{\frac{1}{2}} R \quad [\text{III.13}]$$

que nos permite escribir de la siguiente forma alternativa los niveles de Landau, [Ec.6]:

$$E = \frac{\hbar\omega_c}{2} \frac{R_L^2}{R^2} \quad [\text{III.14}]$$



Para hacernos una idea de los órdenes de magnitud de esta longitud magnética tenemos que, por ejemplo, para un campo magnético de 10T, será aproximadamente de 81Å, y para uno de 30T de 47Å.

Tal como vamos a enfocar el estudio del EHC, la longitud magnética será un parámetro básico a la hora de determinar el espectro energético del electrón en presencia de un campo magnético, [Ec.14], tanto en el caso del efecto Hall cuántico entero (EHCE) como en el fraccionario (EHCF).

De la [Ec.14] se deduce que al aplicar un campo magnético podemos asignar a cada autovalor de la ecuación de Schrödinger, suponiendo degeneración de espín, un espacio  $\pi R^2$ , de manera que el número de estados de cada nivel por unidad de área vendrá dado por

$$n_L = \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2eB}{h} \quad [\text{III.15}]$$

que, por ejemplo, para un campo magnético de un Tesla es del orden de  $n_L \approx 5 \times 10^{14} m^{-2}$ . Hay una manera alternativa de obtener este mismo resultado: Ya mencionamos que la densidad de estados a campo magnético nulo de un S2D es constante con respecto a la energía en cada subbanda, [Parte I], [Apéndice 1]. Esto quiere decir que los estados de energía están homogéneamente distribuidos desde un punto de vista energético, lo que permite calcular fácilmente el número de estados asociado a cada nivel de Landau. Si suponemos que la densidad promedio en energía de cada nivel de Landau,  $n_L / \hbar \omega_c$ , es la misma que la densidad de estados del S2D a campo magnético nulo  $g_0$ , [Ec.I.1], llegaríamos a obtener de nuevo la [Ec.15], [Dávídov,81].

Es importante notar que al aumentar el campo magnético los niveles de Landau se van separando linealmente con el mismo y, en consecuencia, la densidad de estados asociada a cada nivel ha de aumentar proporcionalmente a  $|\vec{B}|$ .

Para poder modelizar analíticamente el EHC necesitamos encontrar una expresión que represente el conjunto de niveles de Landau de forma global. En función de la discusión que acabamos de hacer sobre la densidad de estados para cada nivel de Landau y su relación con la del sistema electrónico a campo magnético nulo, podemos representar la densidad de estados de cada nivel de Landau por la siguiente ecuación

$$g(E_n) = g_0 \delta \left[ x - \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] \quad [\text{III.16}]$$

donde  $\delta$  es la delta de Dirac y se supone que todos los niveles de Landau tienen la misma forma. El escribirla de este modo supone implícitamente no considerar el término de espín ni el efecto de las impurezas ionizadas y los defectos estructurales del S2D. Estos términos los iremos incluyendo de forma progresiva, (véase más adelante).

La ventaja que tiene representar la densidad de estados de este modo es la de poder utilizar directamente la fórmula extendida de la suma de Poisson, [Apéndice 5], que no es más que el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica de término general arbitrario

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi p i\} dx \right\}$$

el primer término es la integral del término general de la densidad de estados de cada nivel de Landau en el intervalo entre  $n$  y  $n+1$ , [Ec.16], y la segunda integral la transformada de Fourier de esta misma función. Con la abreviatura  $\operatorname{Re}$  se indica la parte real del factor incluido entre corchetes.

De modo que, la expresión general para el conjunto de niveles de Landau, haciendo uso de esta fórmula vendrá dada por

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \exp \left\{ 2\pi p \frac{E}{\hbar \omega_c} i \right\} \right\} \right\}$$

que empleando el teorema de convolución, se reduce a

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos \left[ 2\pi p \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] \right\} = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \frac{E}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right] \right\}$$

o de forma compacta

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos[X] \right\} \quad [\text{III.17}]$$

con

$$X = 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right) \quad [\text{III.18}]$$

El siguiente paso será incluir en el hamiltoniano el término de espín,  $H_s$ , responsable del acoplamiento del espín del electrón con el campo magnético, y el de acoplamiento espín-órbita,  $H_{s-o}$ , [Apéndice 8]. Esto supone resolver la ecuación de Schrödinger siguiente

$$\left[ \frac{\vec{\pi}^2}{2m^*} + H_s + H_{s-o} \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad [\text{III.19}]$$

Desde un punto de vista energético, la introducción de estos dos términos de espín supone sumar a cada nivel de Landau, [Ec.6], el factor

$$\pm \frac{g^*}{2} \frac{e\hbar}{2m} B = \pm \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \hbar \omega_c \quad [\text{III.20}]$$

que da lugar al desdoblamiento de espín. Al introducir en la ecuación anterior el factor *giromagnético generalizado*, [Ec.17] del [Apéndice 8], se está teniendo en consideración el efecto del término de interacción espín-órbita.

Este nuevo término de energía nos lleva a expresar ahora la densidad de estados de cada nivel de Landau de la forma

$$g(E_n) = g_0 \delta \left[ x - \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} \mp \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \right) \right] \quad [\text{III.21}]$$

que, utilizando de nuevo la fórmula extendida de la suma de Poisson, nos lleva a

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} \mp \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \right) \right] \right\}$$

Tras descomponer el término coseno en el coseno de una suma y una diferencia, y simplificando el desarrollo, obtenemos

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left( \pi p \frac{g^*}{2} \frac{m^*}{m} \right) \right\} = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos[X] \cos \left( \pi p \frac{g^*}{2} \frac{m^*}{m} \right) \right\}$$

donde  $X$  está dada por la [Ec.18]. Así pues, el efecto del espín del electrón se traduce en la inclusión en el desarrollo en serie de Fourier de la densidad de estados del factor

$$A_{s,p} = \cos \left( \pi p \frac{g^*}{2} \frac{m^*}{m} \right) \quad [\text{III.22}]$$

siendo  $m$  la masa del electrón libre;  $g^*$  el factor *giromagnético generalizado*, [Ec.17] del [Apéndice 8], y  $p$  el armónico  $p$ -ésimo del desarrollo en serie.

Ya hemos mencionado la presencia inevitable de impurezas ionizadas y defectos estructurales en cualquier S2D real, y cuyo efecto sobre los estados de energía del electrón representamos con los términos perturbativos  $U(r)$  y  $H_{ds}$ , [Apéndice 8]. Así, el siguiente paso que daremos será considerar el hamiltoniano

$$H_{total} = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + H_s + H_{s-o} + U(\vec{r}) + H_{ds}$$

Al incluir estos dos últimos términos la ecuación de Schrödinger monoeléctronica se hace irresoluble. Sin embargo, siempre que puedan considerarse como perturbaciones, su efecto será producir un ensanchamiento de cada nivel de Landau.

Ya hemos visto que el poder tratar globalmente el conjunto de niveles de Landau del espectro energético de un electrón viene condicionado por la fórmula de la suma de Poisson. Sin embargo, para usar ésta necesitamos tener expresiones analíticas para la densidad de estados de cada nivel. Así pues, para seguir adelante deberemos hacer hipótesis sobre la forma de la distribución que represente el término de ensanchamiento de cada nivel debido a las impurezas ionizadas y defectos estructurales. Uno de los modelos más establecidos en la bibliografía, sobre todo para S3D, supone que la forma de los niveles de Landau viene representada por una distribución lorentziana, [Shoenberg,84], lo que se traduce, con el tratamiento que estamos haciendo, en una expresión para la densidad estados de cada nivel de la forma

$$g(E_n) = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta \left[ x - \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} \mp \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \right) \right] \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma / \hbar \omega_c}{x^2 + (\Gamma / \hbar \omega_c)^2} \quad [\text{III.23}]$$

que está normalizada a la densidad de estados sin campo magnético, [Ec.I.1].  $\Gamma$  representa el ancho de la *lorentziana*.

La [Ec.23] puede interpretarse como la convolución de dos funciones; por un lado, la delta de Dirac y, por otro, el producto de la densidad de estados a campo magnético nulo por la distribución *lorentziana*. Esta descomposición nos permitirá hacer uso del teorema de convolución para transformadas de Fourier, [Apéndice 6], en la fórmula extendida de la suma de Poisson, con lo que obtenemos

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E}{\hbar \omega_c} \mp \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \right] \right\} \exp \left\{ -2\pi p \frac{\Gamma}{\hbar \omega_c} \right\} \right\} \right\} \quad [\text{III.24}]$$

es decir, que el efecto de las impurezas ionizadas y de los defectos estructurales se traduce en multiplicar cada uno de los armónicos de la densidad de estados por un factor que para el ensanchamiento *lorentziano* que estamos considerando es de la forma

$$A_{\Gamma,p} = \exp \left\{ -2\pi p \frac{\Gamma}{\hbar \omega_c} \right\} \quad [\text{III.25}]$$

donde  $p$  es el índice correspondiente al armónico  $p$ -ésimo.

En los últimos años, para el GE2D se han sugerido otros perfiles para la forma de los niveles de Landau. Así, desde un punto de vista teórico se han deducido perfiles semielípticos, [Ando,85,4], y *gaussianos*, [Zawadzki,84], [Raikh,93,1]. Por otro lado, experimentalmente se ha inferido una forma *gaussiana* para los niveles con un fondo más o menos constante, [Eisenstein,85,1], [Eisenstein,86,2], [Smith,85,1].

El suponer un perfil *gaussiano* implicaría introducir en la [Ec.24], en lugar del término representado por la [Ec.25], un factor de la forma, [Gerhardt,75,1], [Gerhardt,75,2], [Raikh,93,1].

$$A_{\Gamma,p} = \exp\left\{-\frac{2\pi^2 p^2 \Gamma^2}{\hbar^2 \omega_c^2}\right\}$$

La conclusión del desarrollo que hemos efectuado en esta Parte, puede resumirse en la siguiente expresión general para la densidad de estados de un S2D bajo la aplicación de un campo magnético, y en la que ya se incluyen los efectos de espín, de interacción espín-órbita y defectos estructurales e impurezas

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{\Gamma,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad [\text{III.26}]$$

En la [Fig.6] representamos la densidad de estados en función de la energía a los valores del campo magnético indicados en el pie de la figura. Por otro lado, en la [Fig.7] damos la simulación de la densidad de estados relativa  $g/g_0$  vs.  $B$  y vs.  $1/B$  obtenida a partir de la [Ec.26]. En la figura (b) se observa directamente la periodicidad en  $1/B$  característica de las oscilaciones cuánticas y que aparece de forma explícita en el argumento del coseno de la [Ec.18]. Es fundamental para lo que viene después aclarar que estas figuras se han generado fijando el valor de la energía  $E$  del argumento en la [Ec.18] al nivel de Fermi a campo magnético nulo,  $E_F$ , [Ec.I.3]. Las implicaciones físicas de dejar fijo el nivel de Fermi serán determinantes en la explicación del EHC, (véase la [Parte IV]). De modo que, recordando que al variar el campo magnético desplazamos en energía cada uno de los niveles de Landau, [Ec.6], en la [Fig.7] estamos analizando el paso de cada uno de estos niveles a través del nivel de Fermi fijo.

El que la densidad de estados presente este comportamiento oscilante se ha de reflejar igualmente en la mayoría de las propiedades físicas, tanto en las propiedades de transporte, [Apartado 3] de la [Parte IV], como en las de equilibrio, como analizaremos en el [Apartado 7] de la [Parte IV].

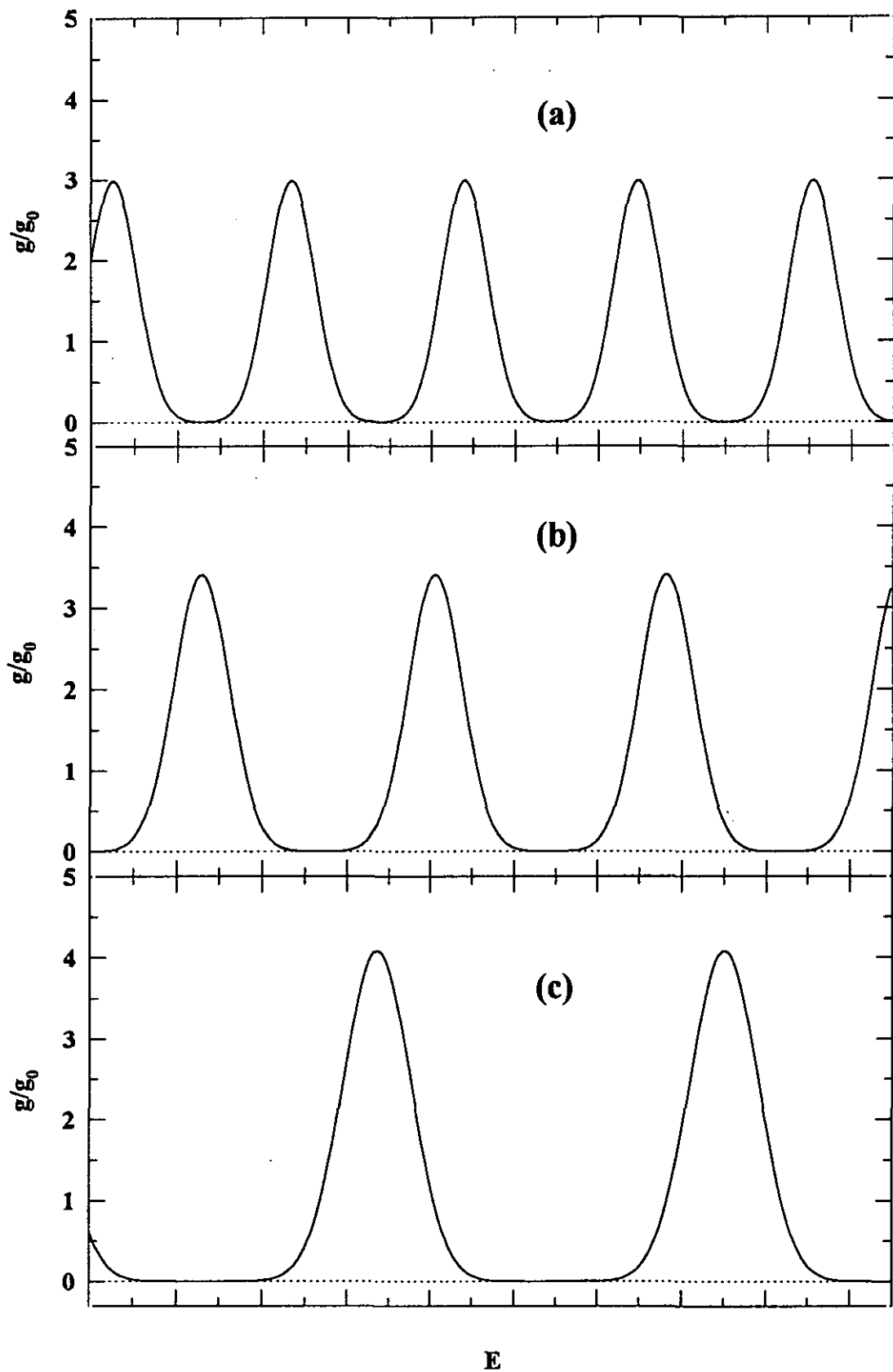


Figura 6: Densidad de estados de un S2D en función de la energía para diferentes valores del campo magnético aplicado: (a) 6T, (b) 8T, (c) 10T.

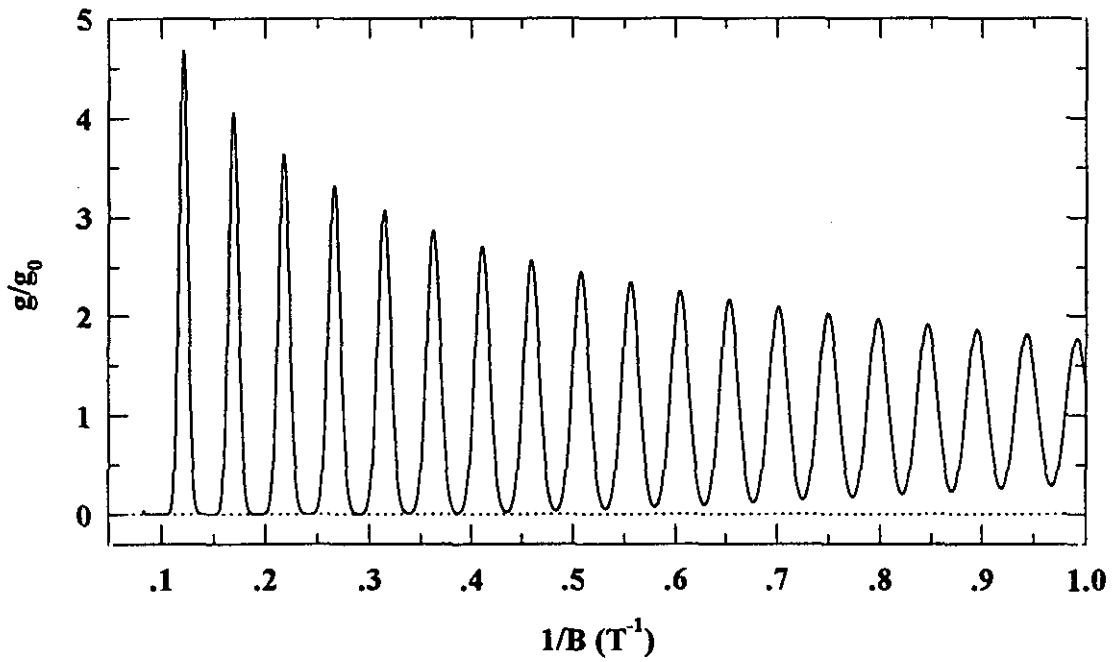
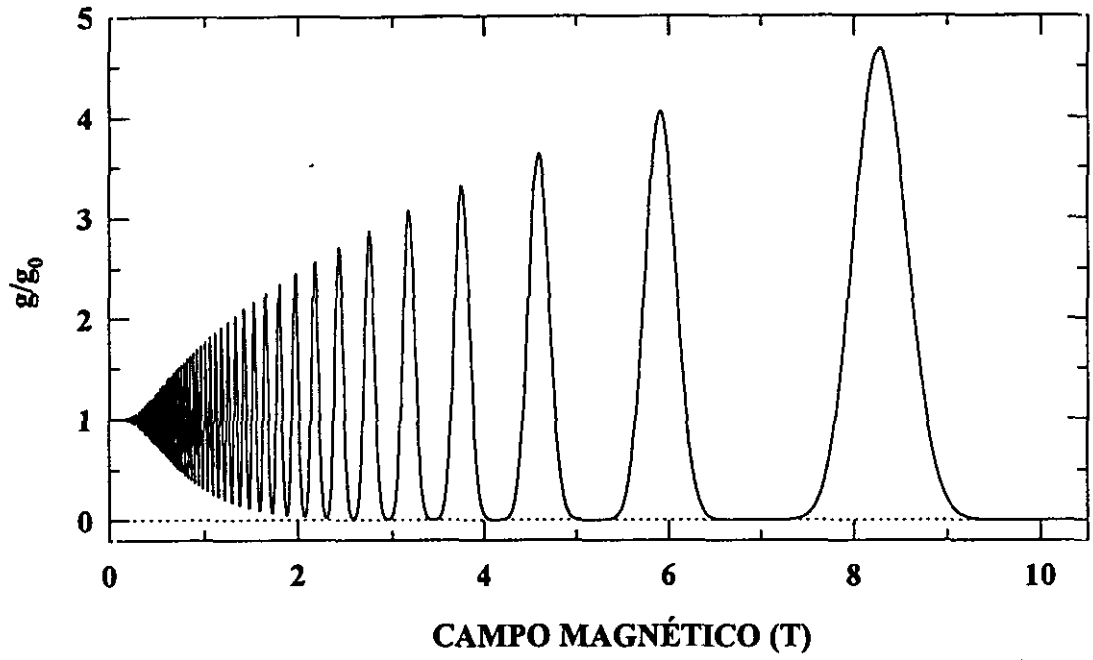


Figura 7: Densidad de estados relativa vs.  $B$  y vs.  $1/B$ . Estas curvas se han obtenido para una densidad de electrones  $n_e = 10^{16} \text{ m}^{-2}$  que implica un nivel de Fermi  $E_F = 35 \text{ meV}$ , [Ec.I.3].





# IV

## DESARROLLO DEL MODELO TEÓRICO

### 1. INTRODUCCIÓN

En 1980, Klitzing *et al.*, [Klitzing,80,1], descubrieron el efecto Hall cuántico entero (EHCE) sobre una estructura MOSFET, (véase la [Parte I]), al someterla a altos campos magnéticos. El fenómeno se caracteriza por la presencia de mesetas (*plateaux*) a valores  $h/ne^2$ , donde  $h$  y  $e$  son constantes universales y  $n$  un índice entero, en la magnetorresistencia Hall,  $R_{xy}$ , para determinados intervalos del campo magnético, independientemente del tipo de muestra analizada siempre y cuando se disponga de un GE2D, [Ebert,82,1], [Ebert,83,2], [Störmer,84,2], [Klitzing,86,4]. Posteriormente se ha encontrado también este mismo efecto en heteroestructuras semiconductoras, [Parte I]. DE forma simultánea, para estos mismos intervalos de campo aparecen mínimos, eventualmente ceros, en la magnetorresistencia digonal,  $R_{xx}$ .

Históricamente, uno de los primeros estudios que se realizaron sobre las propiedades de magnetotransporte en estructuras semiconductoras lo llevó a cabo Fowler *et al.*, [Fowler,66], que analizaron el comportamiento de la magnetoconductividad diagonal, [Parte II], de una estructura MOS (Metal-Oxido-Semiconductor) con diferentes geometrías a altos campos magnéticos. Sin embargo, las muestras no eran de la suficiente calidad como para observar la anulación de los mínimos de las oscilaciones de  $R_{xx}$ . Años después, grupos japoneses invirtieron gran esfuerzo, tanto en la optimización del procesamiento de dispositivos semiconductores como en el análisis teórico y experimental de sus propiedades físicas, [Kawaji,75,1], [Igarashi,75], [Wakabayashi,78,1], [Kawaji,85,2]. A pesar de ello, fué Klitzing el primero en tener muestras de calidad suficiente y, sobre todo, en darse cuenta del carácter fundamental del fenómeno y de su importancia.

Una de las aplicaciones más importantes de la precisión con la que pueden medirse las mesetas de  $R_{xy}$ , de hasta .03 partes por millón, es la exactitud en la determinación de la constante de estructura fina, [Klitzing,82,2], [Yoshihiro,85]:

$$\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{\mu_0 c}{2}$$

siendo  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$  la permeabilidad del vacío y  $c$  la velocidad de la luz, cuyo valor se conoce muy bien. En conexión con esta precisión en la medida de las mesetas, el EHCE ha permitido una definición mucho más exacta del ohmio patrón.

Por otro lado, relanzó el estudio de los efectos cuánticos en sistemas mesoscópicos, es decir, sistemas donde el gas de electrones está confinado en una o más dimensiones.

Con idea de centrar el problema, en la figura que viene a continuación se presentan curvas experimentales típicas de la magnetorresistencia diagonal y Hall, obtenidas en nuestro laboratorio sobre una heteroestructura de  $Al_{0.24}Ga_{0.76}As/In_{0.15}Ga_{0.85}As$  con dopaje  $\delta$  (véase el [Apartado 1] de la [Parte VI]). Las características del GE2D de este pozo cuántico se detallan en el pie de la figura.

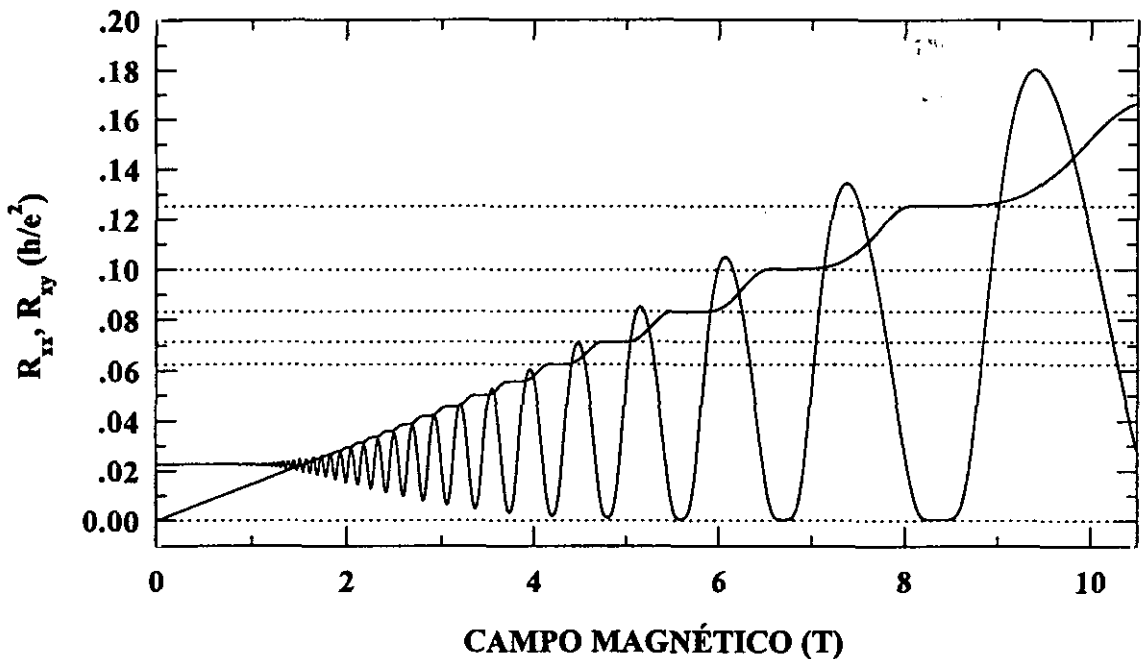


Figura 8: Magnetorresistencia Hall y diagonal de un GE2D en una heteroestructura de  $Al_{0.24}Ga_{0.76}As/In_{0.15}Ga_{0.85}As$ . La densidad de electrones es  $n_e = 1.635 \times 10^{16} m^{-2}$ , su movilidad de  $\mu = 23000 cm^2/V \cdot s$  y la temperatura 1.2K.

Inmediatamente después del descubrimiento del EHCE surgieron las primeras interpretaciones teóricas: explicaciones basadas en la invariancia *gauge*, [Laughlin,81,1], [Laughlin,82,2], y en conexión con esta el concepto de *gap* de movilidad, [Prange,81,1], [Joynt,84], que llevan a la necesidad de la presencia de un *mínimo* de estados localizados en el S2D, [Apéndice 3], [Prange,90,2]. Una aportación importante fue la de Halperin, [Halperin,82,1], que introdujo el concepto de estado de borde, es decir, estado que aparece al nivel de Fermi como consecuencia del curvamiento que sufren los niveles de Landau en la superficie del S2D y debido a la finitud del mismo, [Haugh,93,3], [Kearney,92], [Apartado 6].

La idea común en todas las interpretaciones anteriores es la ruptura de la simetría de traslación. Basándose en esta, Isihara y Smrcka, [Isihara,86,3], [Smrcka,86,2], dieron un paso importante en el aspecto cuantitativo, desarrollando un modelo a temperatura del cero absoluto que, para campos magnéticos medianos y pequeños, proporciona expresiones analíticas para las magnetoconductividades diagonal y Hall de un GE2D. Trataron el sistema electrónico en interacción con una distribución aleatoria de impurezas con la aproximación CPA (*Coherent Phase Approximation*). Su trabajo está basado en otros anteriores de Streda, [Streda,82,2], y Smrcka y Streda, [Streda,75,1], [Smrcka,77,1], que utilizaban la teoría de respuesta lineal desarrollada por Kubo, [Kubo,57,1], para obtener los diferentes coeficientes cinéticos de transporte.

La conclusión fundamental de Isihara y Smrcka puede resumirse en la aparición de un término adicional en la magnetoconductividad Hall consecuencia de los efectos cuánticos. Sin embargo, la interpretación física de este nuevo término no estaba clara en su artículo original, y ha sido más recientemente Pruisken, [Pruisken,87,1], quien basándose en la teoría de campos lo ha interpretado como un factor proporcional a la variación de la imanación del GE2D con el campo magnético, asociando esta imanación a corrientes de borde.

Un problema que queda abierto en todos los modelos anteriores es la dependencia de los tiempos de relajación con el campo magnético. Coleridge *et al.* distinguen dos tiempos de relajación, [Coleridge,89,1], [Coleridge,91,3], [Coleridge,94,4]: Uno que denominan *tiempo de relajación cuántico* relacionado con las colisiones inelásticas que sufre el electrón y otro, el *tiempo de transporte* asociado con las colisiones elásticas. Sin embargo, las expresiones que dan para estos dos tiempos se corresponden con las deducidas de la ecuación de Boltzman en la aproximación de tiempo de relajación, [Apéndice 4], para la que no puede existir dependencia de los tiempos con los campos externos aplicados al sistema.

La ruptura de invariancia traslacional, que lleva consigo la existencia de estados de impurezas y de borde en el S2D, es actualmente el concepto básico con el que se elabora cualquier modelo que

trate de explicar el EHCE. Sin embargo, conviene en este punto hacer una pequeña reflexión: esa ruptura de invariancia traslacional ya es necesaria para la aparición del efecto Hall clásico ya que tanto las impurezas como los estados de borde son necesarios para obtener el régimen estacionario en el sistema.

Büttiker ha dado un enfoque alternativo a los que acabamos de mencionar, aunque puramente fenomenológico, [Büttiker,86,1], [Büttiker,88,2], [Thouless,93]. Este trata de explicar las mesetas Hall, simultáneamente a la anulación de la magnetorresistencia diagonal, a través de los estados de borde (para una discusión detallada de este modelo véase el [Apartado 6]).

Con la aparición del EHCE, una de las primeras tareas que se abordaron fue la determinación experimental de la densidad de estados mediante la medida de propiedades de equilibrio como la imanación, [Eisenstein,85,1], [Eisenstein,86,2], [Apartado 7.2], el calor específico, [Gornik,85], [Wang,88,1], [Wang,92,2], [Apartado 7.3], o la magnetocapacidad, [Goodall,85], [Smith,85,1], [Smith,86,2], [Takaoka,94,2], [Apartado 7.4]. La idea era buscar el perfil de la densidad de estados correspondiente a cada nivel de Landau. En el [Apartado 7.2], [Apartado 7.3] y [Apartado 7.4] discutiremos estos experimentos.

El análisis que hacemos en la mayor parte de la memoria está referido a una única subbanda del pozo cuántico ocupada, [Parte I]. Sin embargo, en los últimos años, ha despertado gran interés el estudio de sistemas electrónicos bidimensionales que presentan dos subbandas ocupadas, [Smith,88,3], [Fernández,92], [Coleridge,90,2], [Lo,95,2]. Nosotros abordaremos el problema en el [Apartado 5] donde extenderemos el modelo teórico desarrollado para una subbanda al caso de dos o más subbandas, [Apéndice 1].

Antes de comenzar con el análisis de los diferentes fenómenos cuánticos es importante detallar las condiciones necesarias para su aparición. Si utilizamos los razonamientos desarrollados en la [Parte II], estas condiciones podrán resumirse en la ecuación

$$\omega_c \tau \gg 1$$

que puede interpretarse empleando una imagen semiclásica en los siguientes términos: Al estar a campos elevados, el electrón tiene tiempo de efectuar un gran número de órbitas antes de colisionar, manifestándose los efectos de cuantización de la órbita del electrón debida al campo magnético. Las consecuencias fundamentales de esta cuantización del espectro energético, son el hecho de que el

vector de onda deja de ser un buen número cuántico para describir los estados del electrón en el cristal y, al no cumplirse la [Ec.III.33], la ecuación de Boltzman ya no es válida.

El método más exacto de abordar el problema del electrón de un cristal sometido a la acción de un alto campo magnético es a partir de la ecuación de Liouville para la matriz densidad, [Huang,87], [Lifshitz,86]. Sin embargo, como analizamos en el [Apéndice 8], el hamiltoniano del electrón es muy complejo e imposible de evaluar de manera exacta, y del formalismo de la matriz densidad no puede obtenerse ningún resultado analítico concluyente. Nosotros vamos a adoptar un enfoque mucho más sencillo basado directamente en el análisis de la forma de la solución de la ecuación de Schrödinger. A partir de ella, buscaremos una ecuación de transporte equivalente a la ecuación de Boltzman para la región de comportamiento cuántico del electrón, [Ec.11]. El principal resultado que obtendremos de la solución de esta ecuación es un tensor de magnetoconductividad expresado de forma general a través de la *fórmula de las integrales de tubo de Shockley*, [Apartado 3.1].

Tal como hemos determinado los regímenes clásicos y cuánticos, el límite entre estos dos vendrá determinado por la ecuación

$$\omega_c \tau = 1$$

que, interpretándolo desde un punto de vista semiclásico, proporciona el valor de campo magnético para el cual el electrón efectúa una única órbita ciclotrón completa.

Esta [Parte IV] constituye el núcleo central de la memoria y en ella estudiaremos, en primer lugar, las propiedades de magnetotransporte a altos campos magnéticos, ( $B > 3T$ ). En el [Apartado 7] extenderemos el estudio a las propiedades de equilibrio: imanación, calor específico y magnetocapacidad. Tanto para las propiedades de transporte como para las de equilibrio es indispensable conocer la densidad de estados del S2D bajo la aplicación del campo magnético, lo que justifica el haberle dedicado como hemos hecho un capítulo completo, [Parte III].

## 2. DEPENDENCIA TÉRMICA DE LOS EFECTOS CUÁNTICOS

Comenzaremos esta Parte obteniendo la expresión general para la dependencia térmica de las propiedades físicas. Esta dependencia está reflejada en la población de los estados electrónicos con la temperatura. A  $T=0K$  el sistema electrónico es completamente degenerado y la función de

distribución de Fermi-Dirac, [Ec.II.9], puede asimilarse a una función salto de Heaviside centrada en el nivel de Fermi, de manera que la densidad de electrones puede calcularse a través de la ecuación

$$n = \int_0^{E_F} g(E) dE \quad [IV.1]$$

donde  $E_F$  es el nivel de Fermi a campo magnético nulo, [Ec.I.3]. Ahora bien, para temperaturas diferentes del cero absoluto deberemos utilizar la expresión más general

$$n = \int_0^{\infty} f^0(E) g(E) dE \quad [IV.2]$$

que haciendo uso de la [Ec.III.26] podemos expresar como

$$n = g_0 \int_0^{\infty} f^0(E) + 2g_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{s,p} A_{r,p} \int_0^{\infty} f^0(E) \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] i \right\} dE \right\}$$

el primer término integral corresponde a la densidad de electrones total en el GE2D a campo nulo,  $n_0$ . El segundo término integral puede desarrollarse por partes de la forma

$$2g_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{s,p} A_{r,p} \int_0^{\infty} f^0(E) \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] i \right\} dE \right\} = f^0(E) n(E) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dE \frac{\partial f^0}{\partial E} n(E)$$

siendo  $n(E)$  la integral de la parte oscilatoria de la densidad de estados, dada por la ecuación

$$n(E) = -2g_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p i \frac{\hbar \omega_c}{2\pi p} A_{s,p} A_{r,p} \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] i \right\} \right\}$$

Tomando el origen de energías en cero, el primer término de la integración por partes desaparece. Así, obtenemos la densidad electrónica

$$n = n_0 + 2g_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p i \frac{\hbar \omega_c}{2\pi p} A_{s,p} A_{r,p} \int_0^{\infty} dE \frac{\partial f^0}{\partial E} \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E}{\hbar \omega_c} \right] i \right\} \right\}$$

Si usamos la expresión para la derivada de la función de distribución de Fermi-Dirac

$$\frac{\partial f^0}{\partial E} = - \frac{\exp \left\{ \frac{E - E_F}{kT} \right\}}{kT \left( 1 + \exp \left\{ \frac{E - E_F}{kT} \right\} \right)^2}$$

(Supondremos siempre que el potencial químico puede aproximarse en todo momento por el nivel de Fermi), y efectuando el cambio de variable  $\eta = (E - E_F)/kT$ , el término integral nos quedaría de la forma

$$- \exp \left\{ 2\pi p \frac{E_F}{\hbar \omega_c} i \right\} \int_{-\frac{E_F}{kT}}^{\infty} d\eta \frac{\exp \eta}{(1 + \exp \eta)^2} \exp \left\{ 2\pi p \frac{\eta kT}{\hbar \omega_c} i \right\}$$

Esta integral puede resolverse fácilmente si tenemos en consideración que la función del integrando es rápidamente decreciente y estamos a muy bajas temperaturas, es decir, en condiciones de degeneración, de manera que se cumple la desigualdad

$$E_F \gg kT$$

Todo esto hace posible extender el límite inferior del integrando hasta  $-\infty$ , lo que nos permite tratar la integral anterior como una transformada de Fourier al igual que hicimos para el caso del término de ensanchamiento producido por las impurezas ionizadas y los defectos estructurales. Así, operando obtenemos la ecuación general para la densidad de electrones en el GE2D dada por la expresión siguiente

$$n = n_0 + \frac{2eB}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} \exp \left\{ -2\pi p \frac{\Gamma}{\hbar \omega_c} \right\} \frac{\frac{2\pi^2 p k T}{\hbar \omega_c}}{\sinh \left[ \frac{2\pi^2 p k T}{\hbar \omega_c} \right]} \cos \left[ \pi p \frac{g^*}{2} \frac{m^*}{m} \right] \sin \left[ 2\pi p \left[ \frac{E_F}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right] \right] \quad [\text{IV.3}]$$

De lo que concluimos que los efectos térmicos aparecen en las ecuaciones únicamente como el producto del armónico correspondiente del desarrollo por el factor

$$A_{T,p} = \frac{z}{\sinh z} \quad [\text{IV.4}]$$

donde la variable  $z$  es de la forma

$$z = \frac{2\pi^2 p k T}{\hbar \omega_c} \quad [\text{IV.5}]$$

y en la que  $p$  representa el índice correspondiente al  $p$ -ésimo armónico,  $k$  la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura.

A la hora de comparar con los datos experimentales hay que tener muy presente que para obtener estas expresiones hemos extendido el límite inferior de la integral hasta  $-\infty$ . Esta aproximación, justificada para temperaturas muy bajas, deja de ser aceptable incluso para temperaturas del orden de 15K ya que producirá discrepancias espurias del modelo con los resultados experimentales.

### 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN FUNCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

Vamos a suponer válida la aproximación de electrones independientes. El único término del hamiltoniano que queda fuera de esta aproximación es el correspondiente a la interacción electrón-electrón. Sin embargo, uno de los resultados fundamentales que se obtiene de la teoría del líquido de Fermi relacionada con sistemas electrónicos estacionarios, como son los que nos interesan para el EHC, es que el efecto de la interacción electrón-electrón se resume únicamente en un tiempo de vida finito adicional,  $\tau_{e-e}$ , para el correspondiente estado estacionario monoelectrónico del electrón, [Ashcroft,76], [Lifshitz,86]. Este problema lo analizaremos en el [Apartado 3.3].

En este [Apartado 3] desarrollamos nuestro modelo en función del campo magnético y en el [Apartado 4] lo extenderemos al EHC y SdH en función de la tensión de puerta.

Ya hemos mencionado que el principal problema que se encuentra al intentar abordar el estudio de los efectos galvanomagnéticos a altos campos magnéticos es el estar fuera del intervalo de validez de la ecuación clásica de Boltzman, [Parte II]. Por tanto, debemos abordar el problema de la obtención de los coeficientes cinéticos de magnetotransporte desde otro punto de vista. Trataremos de sacar el máximo partido a la solución de la ecuación de Schrödinger con el hamiltoniano general, [Apéndice 8], en donde supondremos que el campo magnético es lo suficientemente grande como para que el término cinético sea el dominante y el resto puedan considerarse perturbativamente. A estos campos el vector de onda deja de ser un buen número cuántico, por lo que para caracterizar los estados electrónicos hay que tomar el índice correspondiente a cada nivel de Landau,  $n$ . El hecho de que conmuten las autofunciones del hamiltoniano con el momento angular orbital del electrón nos permite definir un concepto de órbita, similar al clásico, y que lleva a introducir un nuevo parámetro  $\phi$ , dependiente de la frecuencia ciclotrón, de la forma siguiente, [Ziman,64]:

$$\phi = \omega_c \frac{\hbar}{eB} \int \frac{dk}{v}$$

donde  $v$  es la velocidad del electrón. La integración se efectúa sobre todo el espacio recíproco. Esta nueva variable representa una fase que aumenta con velocidad constante bajo la influencia del campo magnético

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c$$

y al cabo de un periodo se hace  $\phi=2\pi$ . De este modo, podemos expresar la parte de desequilibrio de la función de distribución  $f^1 = f - f^0$  debida al campo magnético, como

$$\phi \frac{\partial f^1}{\partial \phi} = \omega_c \frac{\partial f^1}{\partial \phi}$$



Con lo que la ecuación de Boltzman generalizada para un sistema sometido a un campo magnético y otro eléctrico de transporte, ambos estacionarios, vendrá dada por la ecuación

$$e\vec{E}' \cdot \vec{v} \left( -\frac{\mathcal{J}^0}{\mathcal{E}} \right) = \frac{f^1}{\tau} + \omega_c \frac{\mathcal{J}^1}{\partial \phi} \quad [\text{IV.6}]$$

El término de campo eléctrico tiene la misma forma que en el caso de la ecuación clásica puesto que como analizamos al final de la [Parte II], para los campos que nos interesan podemos considerar que estamos en condiciones clásicas. Por otro lado, de forma similar a como hacíamos en la ecuación de Boltzman, volvemos a escribir el factor relacionado con el campo magnético en la parte correspondiente al término de colisiones. Sin embargo, aquí  $\tau$  no representa un tiempo entre colisiones sino que, como analizaremos en el [Apartado 3.3], debemos interpretarlo como el tiempo de vida asociado al correspondiente estado energético del electrón. Como resumen, hagamos un esquema de las conexiones entre esta ecuación generalizada y la ecuación clásica de Boltzman. A continuación representamos a la izquierda los términos correspondientes a la ecuación de Boltzman y a la derecha, las equivalencias para la ecuación generalizada

$$\begin{aligned} e\vec{E}' \cdot \vec{v}(\vec{k}) \left( -\frac{\mathcal{J}_k^0}{\mathcal{E}} \right) &\rightarrow e\vec{E}' \cdot \vec{v} \left( -\frac{\mathcal{J}^0}{\mathcal{E}} \right) \\ \frac{f_k^1}{\tau} &\rightarrow \frac{f^1}{\tau} \\ \frac{1}{\hbar} (\vec{v}(\vec{k}) \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{k}} f_k^1 &\rightarrow \omega_c \frac{\mathcal{J}^1}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Destaquemos algunos detalles de esta comparación: El tiempo de vida no tiene por qué ser, y de hecho no es, ([Parte VII]), independiente de los campos aplicados, a diferencia de lo que exigía la aproximación de tiempo de relajación. La velocidad no es ahora una función del vector de onda del espacio recíproco sino de la nueva variable de fase,  $\phi$ . Y la función de distribución de desequilibrio no depende del vector de onda.

Es muy importante tener presente que esta ecuación es una hipótesis de trabajo que, aunque físicamente razonable, hay que justificar *a posteriori*.

La solución de la [Ec.11] es de la forma, [Ziman,64], [Ziman,79]:

$$f^1(\phi) = -\frac{e}{\omega_c} \left( -\frac{\mathcal{J}^0}{\mathcal{E}} \right) \int_{-\infty}^{\phi} \vec{v}(\phi) \cdot \vec{E} \exp \left\{ \frac{(\phi'' - \phi)}{\omega_c \tau} \right\} d\phi''$$

De aquí se obtiene la densidad de corriente que nos permite determinar el tensor de magnetoconductividad de forma similar a como hicimos con la ecuación de Boltzman. Generalizando la ecuación de Kubo para la nueva variable nos queda

$$\bar{J} = -\frac{e}{2\pi^2} \frac{m^*}{\hbar^2} \int \bar{v}(\phi) f'(\phi) d\phi$$

de donde, sustituyendo la expresión para la función de distribución de desequilibrio, obtenemos la expresión general para los coeficientes cinéticos de magnetotransporte

$$\sigma_{ik} = \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{m^*}{\omega_c} \int_0^\infty \int_0^\infty v_i(\phi) v_k(\phi - \phi') \exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} d\phi d\phi'$$

Esta ecuación es conocida como *fórmula de las integrales de tubo de Shockley*, y es universal para el tensor de magnetoconductividad, [Ziman,64], [Ziman79], [Kittel,87].

Para altos campos magnéticos, es decir, en condiciones cuánticas para las que se cumple la relación  $\omega_c \tau \gg 1$ , podemos resolver estas integrales utilizando el hecho de que las velocidades han de ser funciones periódicas de las variables  $\phi$  y  $\phi'$ . El intervalo de integración de  $\phi'$  puede ser entonces dividido en intervalos de  $2\pi$ . De forma que obtenemos

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} f(\phi') d\phi' = \sum_n \exp\left\{-\frac{2\pi n}{\omega_c \tau}\right\} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} f(\phi') d\phi' \approx \frac{\omega_c \tau}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} f(\phi') d\phi'$$

Así, utilizando este resultado, el tensor de magnetoconductividad puede reducirse a la ecuación

$$\sigma_{ik} = \frac{m^*}{4\pi^3} \frac{e^2}{\hbar^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v_i(\phi) v_k(\phi - \phi') \exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} d\phi d\phi'$$

Teniendo limitado el intervalo de  $\phi'$  aproximamos la exponencial del integrando a través de su desarrollo en serie de Taylor

$$\exp\left\{-\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right\} = 1 - \frac{\phi'}{\omega_c \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{\omega_c \tau}\right)^2 - \dots$$

Como las otras funciones del tensor de magnetoconductividad son independientes de la frecuencia ciclotrón y, por tanto, del campo magnético, este desarrollo nos permite obtener el tensor de magnetoconductividad en potencias de  $1/B$ .

### 3.2. MAGNETOCONDUCTIVIDAD HALL

El cálculo de la magnetoconductividad Hall constituye uno de los apartados fundamentales de la memoria. En el apartado anterior construíamos el esquema matemático necesario para el cálculo

de los dos términos de la magnetoconductividad en el caso cuántico. En éste determinaremos la expresión particular para el término Hall.

Para el primer término del desarrollo tenemos

$$\int v_x(\phi) d\phi = \int v \cos \theta \frac{\hbar}{m^*} \frac{dk}{v} = -\frac{\hbar}{m^*} \int dk_y$$

que es nulo si cerramos la órbita de la variable  $\phi$ . De modo que en un S2D no hay ningún término de la magnetoconductividad independiente del campo magnético. Para el término siguiente del desarrollo podemos usar el resultado anterior e integrar por partes, entonces, nos queda la ecuación

$$\int_0^{2\pi} \phi' v_x(\phi - \phi') d\phi' = \frac{2\pi\hbar}{m^*} k_y(\phi) - \frac{\hbar}{m^*} \int_0^{2\pi} k_y(\phi - \phi') d\phi'$$

donde el segundo factor es nulo debido a que la órbita siempre tiene un centro de simetría. Sin embargo, el primer término contribuye a la componente de la magnetoconductividad Hall.

Así pues, utilizando el resultado que obtuvimos para el término independiente del desarrollo, el término no diagonal del tensor de magnetoconductividad estará determinado por la expresión siguiente

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi^2 \hbar^2} \frac{m^* \tau}{2\pi} \frac{1}{\omega_c \tau} \int_0^{2\pi} v_y(\phi) \frac{2\pi\hbar}{m^*} k_y(\phi) d\phi$$

que operando se reduce a

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{\omega_c m^*} \oint k_y dk_x = -\frac{e}{B} \frac{1}{2\pi^2} \oint k_y dk_x$$

El término integral representa el área de la región del espacio recíproco encerrado por la línea de Fermi, [Parte II]. Es decir:

$$\sigma_{xy} = -\frac{en}{B} \quad [\text{IV.7}]$$

siendo  $n$  el número de electrones por unidad de área contenidos en la región limitada por la línea de Fermi. Una característica fundamental que hay que destacar de esta ecuación, es su independencia del tiempo de vida del correspondiente estado electrónico, lo que la convierte en una magnitud de equilibrio.

La [Ec.7] exige conocer la densidad electrónica del GE2D sometido a un campo magnético, que ya obtuvimos en el [Apartado 2], [Ec.3]:

$$n = n_0 + \frac{2eB}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} A_{s,p} A_{r,p} A_{t,p} \sin[X_F] \quad [\text{IV.8}]$$

donde el argumento de las funciones trigonométricas es

$$X_F = 2\pi\varphi \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \quad [\text{IV.9}]$$

siendo  $E_F$  el nivel de Fermi a campo magnético nulo, [Ec.I.3].

El primer término de la [Ec.8] no es más que el número de electrones por unidad de área en el GE2D a campo magnético nulo. El segundo, que denotaremos con  $\delta n$ , representa la fluctuación en la densidad de electrones debido a la combinación de dos fenómenos físicos: La aparición de niveles de Landau cuya densidad de estados varía con el campo magnético y el hecho de que el nivel de Fermi de cualquier S2D real, al ser un sistema termodinámicamente abierto, ha de estar igualado con el de su entorno físico.

Así pues, esta fluctuación del número de electrones por unidad de área del GE2D debida al campo magnético es

$$\delta n = \frac{2eB}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\varphi} A_{s,p} A_{r,p} A_{t,p} \text{sen}[X_F] \quad [\text{IV.10}]$$

y la expresión general para la población del GE2D, [Ec.8], la escribiremos a partir de este momento de la forma

$$n = n_0 + \delta n \quad [\text{IV.11}]$$

En la [Fig.9] representamos la [Ec.11] para las condiciones indicadas en el pie de la misma.

De manera que tenemos una fluctuación de la densidad de electrones con el campo magnético en torno a su valor a campo cero, [Ec.11], que ha de reflejarse en la magnetoconductividad Hall como se deduce directamente de su expresión para alto campo magnético, [Ec.7].

Por tanto, podemos escribir la expresión general para la magnetoconductividad Hall de la forma

$$\sigma_{xy} = -\frac{en}{B} \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = -\frac{e}{B} (n_0 + \delta n) \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad [\text{IV.12}]$$

En esta ecuación se ha añadido el último término para tener en consideración el comportamiento semiclásico a bajo campo, [Ec.II.29], término que a altos campos se hace prácticamente uno. Aunque esta ecuación es formalmente equivalente a la correspondiente ecuación clásica, [Ec.II.29], aquí  $\tau$  representa el tiempo de vida del estado energético del electrón a un campo magnético dado, (véase el [Apartado 3.3]).

Así pues, para altos campos magnéticos la [Ec.12] puede escribirse de la forma

$$\sigma_{xy} = -\frac{e}{B} (n_0 + \delta n) \quad [\text{IV.13}]$$

que tiene dos componentes, una clásica y otra cuántica. De forma más compacta la escribiremos como sigue

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \delta\sigma_{xy}$$

siendo  $\sigma_{xy}^0$  el término Hall clásico.

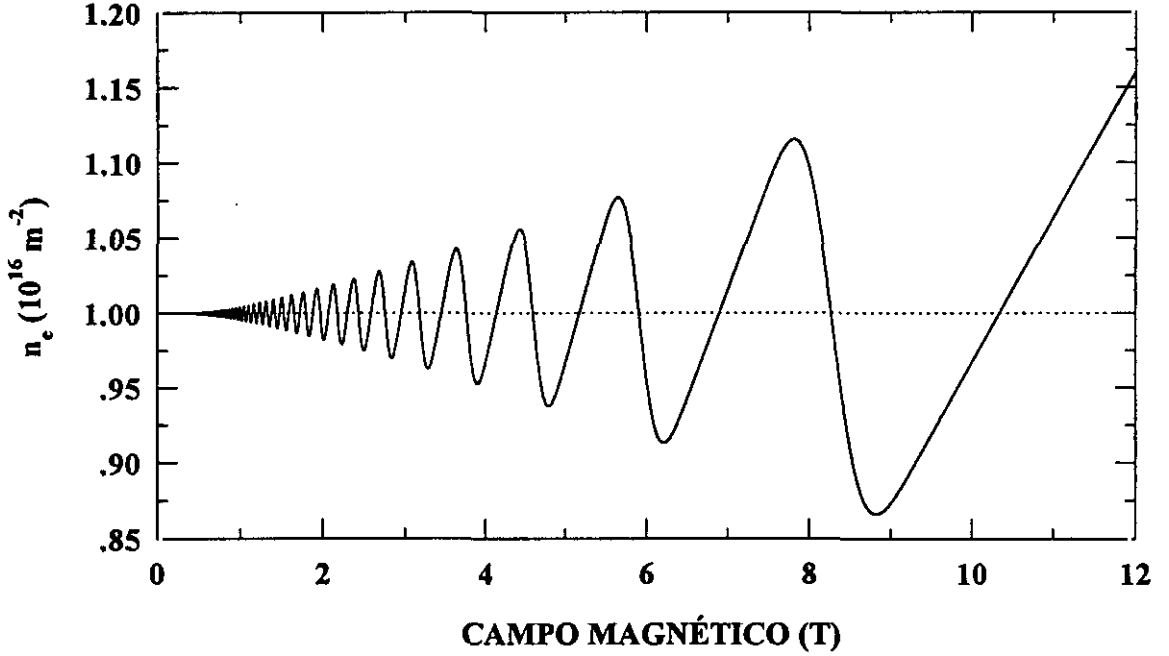


Figura 9: Simulación de la dependencia de la densidad de electrones con el campo magnético para un S2D con una concentración  $n_0=10^{16}m^{-2}$ , lo que implica un nivel de Fermi  $E_F=35meV$ .  $T=1.2K$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ .

Por tanto, podemos establecer la siguiente regla a alto campo magnético: el paso de la magnetoconductividad Hall clásica a la correspondiente cuántica se hace a través del siguiente cambio en el término clásico del efecto Hall

$$n_0 \rightarrow (n_0 + \delta n) \quad [IV.14]$$

con  $\delta n$  dada por la [Ec.10].

La [Ec.13], con la fluctuación de la densidad de electrones expresada por la ecuación [Ec.10] constituye una de las conclusiones fundamentales de esta memoria ya que, como representamos en la [Fig.10], este término adicional da lugar a la aparición de las mesetas características de efecto Hall a valores enteros en unidades de  $e^2/h$ . El que aparezcan únicamente las mesetas correspondientes a

valores enteros pares se debe a que las condiciones impuestas en la simulación son tales que no producen la ruptura de la degeneración de espín.

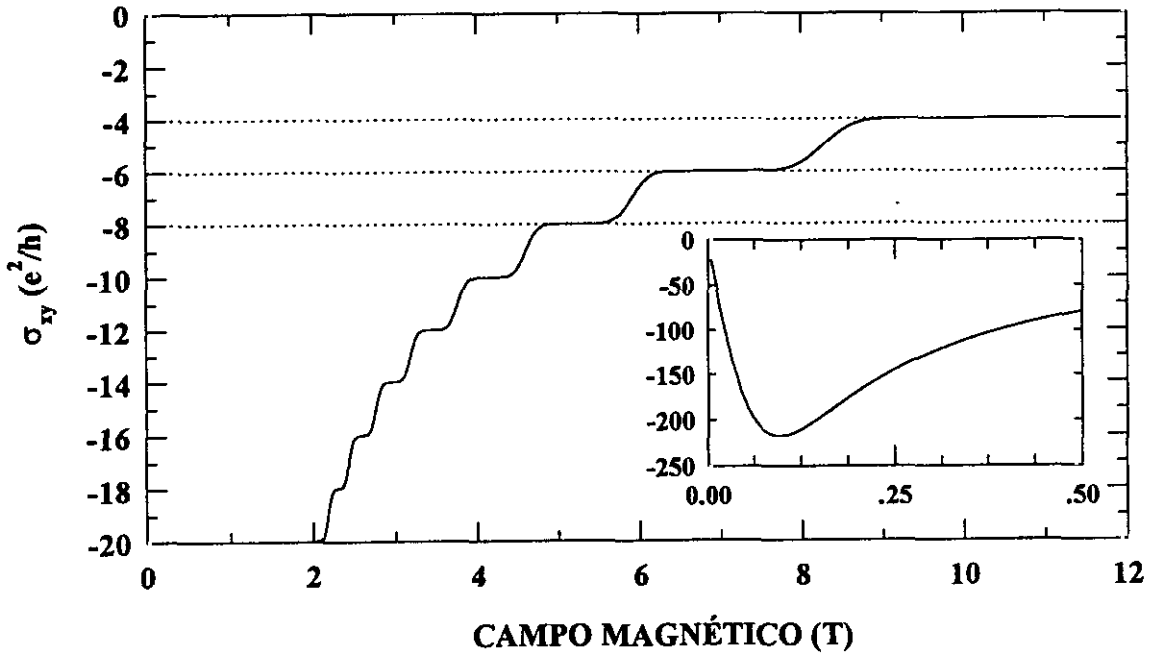


Figura 10: Simulación de la magnetoconductividad Hall para un S2D con una concentración de  $n_0=10^{16}m^{-2}$ ,  $E_F=35meV$ ,  $T=1.2K$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ . En la propia figura se destacan las posiciones de las diferentes mesetas. La figura insertada representa el comportamiento semiclásico.

De todo lo anterior hay que destacar tres puntos fundamentales: En primer lugar, la aparición de una fluctuación en la densidad de electrones del GE2D. En segundo, la independencia de la magnetoconductividad Hall con el tiempo de vida (véase el próximo apartado). Y por último, como se deduce de la [Fig.10], la exploración directa de los índices de Landau en las mesetas de  $\sigma_{xy}$  debido a su dependencia con la fluctuación de la densidad de electrones.

En todas las simulaciones que realizamos en este [Apartado 3], el nivel de Fermi está fijo al valor que se indica en el pie de cada figura. Ya hemos mencionado que físicamente éste queda determinado al formarse la capa de inversión como consecuencia de la igualación de los niveles de Fermi entre las diferentes partes de la heteroestructura semiconductor.

Antes de seguir adelante, resumiremos las tres condiciones determinantes, según nuestro modelo, en la aparición de las mesetas en la magnetoconductividad Hall:

1) Para cualquier valor del campo magnético el nivel de Fermi, dado por la [Ec.I.3], está fijado por el entorno físico externo del S2D.

2) El aumento del valor del campo magnético produce un aumento en la densidad de estados de cada nivel de Landau, [Ec.III.15].

3) La energía de cada nivel aumenta a medida que aumentamos el campo magnético, [Ec.III.6].

Una de las cuestiones sobre el EHC que desde el primer momento llamó más la atención fue la precisión con la que estaban definidas las mesetas. Sin embargo, según deducimos de nuestro modelo, esta precisión está completamente determinada por la buena o mala *definición* de los niveles de Landau; a medida que ésta sea mayor, mejorará la precisión de las mesetas.

Por tanto, la idea física del EHC es completamente similar a la del efecto de Haas-van Alphen, y depende de lo efectivo que sea el término cinético del hamiltoniano frente a la interacción debida a las impurezas ionizadas y los defectos estructurales.

### 3.3. MAGNETOCONDUCTIVIDAD DIAGONAL

Nos planteamos ahora la deducción de la componente diagonal de la magnetoconductividad transversa,  $\sigma_{xx}$ . Para ello debemos volver a la expresión general del tensor de magnetoconductividad. Se puede demostrar que en  $\sigma_{xx}$  no hay término de orden  $1/B$  ya que se anula la integral correspondiente sobre la línea de Fermi, [Ziman,64]. Así, la primera componente no nula para este coeficiente corresponde al término de orden  $1/B^2$ .

Sin embargo, no puede obtenerse una expresión compacta para la magnetoconductividad diagonal al igual que se hizo con la Hall y todo lo que podemos afirmar a partir del desarrollo en serie que estamos empleando, es la dependencia con la inversa del cuadrado del campo magnético, con un coeficiente que deberemos deducir, desde un punto de vista teórico, de forma indirecta y efectuando ciertas hipótesis físicas razonables.

Al ser este coeficiente cinético el factor de proporcionalidad entre la componente  $J_i$  de la densidad de corriente y la componente  $\vec{E}_i$  del campo eléctrico de transporte, [Parte II], está directamente asociado al término de arrastre de la ecuación general de transporte, [Ec.6]. Por tanto, debido al principio de exclusión de Pauli, los únicos electrones que intervienen en este coeficiente al atravesar un nivel de Landau el nivel de Fermi, son los correspondientes a un entorno cuyo ancho en energías está determinado por la energía térmica  $kT$ .

Si llamamos  $N$  a la densidad de electrones próximos al nivel de Fermi, entonces

$$N \approx \int_{\varepsilon}^{\infty} f^0(E) g(E) dE \quad [\text{IV.15}]$$

donde el límite inferior viene dado ahora por la expresión  $\varepsilon = E_F - kT/2$ , con el que tenemos en cuenta la densidad de electrones que pueden verse afectados por el campo de transporte debido a la temperatura. Resolviendo esta integral de forma similar a la representada en la [Ec.2] obtenemos la ecuación

$$N \approx g_0 \int_{\varepsilon}^{\infty} f^0(E) dE + 2g_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p i \frac{\hbar \omega_c}{2\pi p} A_{s,p} A_{r,p} \exp \left\{ 2\pi p \left[ \frac{E_F}{\hbar \omega_c} \right] \right\} \left( \exp \left\{ -2\pi p \left[ \frac{kT}{\hbar \omega_c} \right] \right\} + I_p(T) \right) \right\}$$

donde el término  $I_p(T)$  está dado por

$$I_p(T) = - \int_{-1}^{\infty} d\eta \frac{\exp \eta}{(1 + \exp \eta)^2} \exp \left\{ 2\pi p \frac{\eta kT}{\hbar \omega_c} \right\}$$

En el cero absoluto de temperaturas los únicos electrones que intervienen en el transporte son los correspondientes al nivel de Fermi, de modo que para seguir utilizando la expresión de esta densidad de electrones en forma de distribución, en la [Ec.15] debemos expresar la función de distribución de Fermi-Dirac para los electrones del nivel de Fermi, a través de la ecuación

$$f^0(E) = \delta(E - E_F)$$

que nos lleva directamente a la expresión exacta para la densidad de electrones al nivel de Fermi en el cero absoluto de temperaturas

$$N = E_F g(E_F) \quad [\text{IV.16}]$$

siendo  $g(E_F)$  la densidad de estados al nivel de Fermi y a un campo magnético determinado. Ahora bien, como el nivel de Fermi permanece en todo momento fijo, su valor es el correspondiente a campo magnético nulo, [Ec.I.3], de manera que la ecuación anterior se simplifica a

$$N = n_0 \frac{g(E_F)}{g_0} \quad [\text{IV.17}]$$

Las temperaturas a las que aparece bien definido el EHC son lo suficientemente bajas como para suponer válida en primer orden la [Ec.17] para la densidad de electrones. En las simulaciones y ajustes que efectuamos a lo largo de la memoria consideraremos, por simplicidad, que estamos en estas condiciones.

Así pues, extrapolaremos la magnetoconductividad diagonal semiclásica imponiendo la condición cuántica dada por la [Ec.17], de modo que nos queda



$$\sigma_x = \frac{en_0}{B\omega_c\tau} \frac{g(E_F)}{g_0} \frac{\omega_c^2\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2} \quad [\text{IV.18}]$$

Al igual que hicimos en el caso de la magnetoconductividad hemos incluido el término de bajo campo, que se hace uno a altos campos, con lo que nos quedaría

$$\sigma_x = \frac{en_0}{B\omega_c\tau} \frac{g(E_F)}{g_0} \quad [\text{IV.19}]$$

En esta ecuación aparece la magnitud  $\tau$  en el denominador, asociado al término de arrastre de la ecuación general de transporte, [Ec.6], y que no aparecía a alto campo magnético en la magnetoconductividad Hall. Para comprender mejor su significado conviene darle un sentido físico diferente al tiempo entre colisiones de la interpretación semiclásica. Así, asociaremos  $\tau$  al tiempo de vida de un electrón en un determinado estado electrónico. Esta interpretación es compatible con su sentido semiclásico a campo magnético nulo, donde las funciones de onda corresponden a las funciones de Bloch. Sin embargo, para nosotros tiene una ventaja adicional: Este significado de  $\tau$  nos permite incluir directamente el carácter localizado o extendido de los estados electrónicos del electrón en la forma que describiremos en la [Parte VII].

Consideremos un estado de energía estacionario para el electrón,  $E_n$ , y designemos por  $\tau$  su tiempo de vida, es decir, la magnitud igual al recíproco de la probabilidad por unidad de tiempo de que el electrón deje de estar en ese estado. El principio de indeterminación para la energía establece la relación

$$|E - E_n| \approx \frac{\hbar}{\tau}$$

donde  $E$  es el estado de energía final del electrón. A la magnitud que expresa la probabilidad de que un electrón transite de un estado energético a otro la denotaremos por  $\Sigma$ . Así, tenemos que

$$\Sigma \approx \frac{1}{\tau}$$

Para calcular esta magnitud hay que hacer uso de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, [Messiah,75]. Supongamos que conocemos el espectro de autofunciones del hamiltoniano estacionario siguiente

$$H_{total} = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + H_s + H_{s-o} + U(\vec{r}) + H_{ds}$$

Sea  $\alpha$  uno de sus autoestados y  $E(\alpha)$  el valor de la energía correspondiente a este mismo estado. Llamando  $g(E)$  a la densidad de estados de la distribución continua, la probabilidad de transición del

estado  $\alpha$  a cualquier otro de esta distribución como consecuencia de una perturbación  $\phi$  vendrá dada por

$$\Sigma_{\phi} = \int_{\beta} \Sigma_{\alpha \rightarrow \beta} g(E) dE \quad [\text{IV.20}]$$

donde la integración se efectúa sobre todos los estados posibles de la distribución, y  $\Sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$  representa la probabilidad de transición de un estado  $\alpha$  a otro  $\beta$  del espectro continuo que viene dada por, [Messiah,75]:

$$\Sigma_{\alpha \rightarrow \beta} = |\langle \beta | U(t,0) | \alpha \rangle|^2$$

donde  $U(t,0)$  es el operador de evolución temporal para la perturbación correspondiente. Si la perturbación conserva la energía, la expresión anterior puede simplificarse a

$$\Sigma_{\phi} \approx \frac{2\pi}{\hbar} |\phi_{\alpha\beta}|^2 g(E(\alpha))$$

siendo

$$\phi_{\alpha\beta} \equiv \langle \beta | \phi | \alpha \rangle$$

y donde los estados iniciales y finales poseen la misma energía. Esta última ecuación representa la *regla de oro de Fermi*. Sin embargo, en nuestro estudio del EHC estaremos interesados en la ecuación general para la probabilidad de transición, [Ec.20]. Adams y Holdstein, [Adams,59], [Fawcett,64], efectuaron un estudio detallado de la forma de los tiempos de vida para cada uno de los tipos de interacción que puede sufrir un electrón en un sistema tridimensional (S3D). Sin embargo, no existe un estudio tal para los S2D.

De manera que el tiempo de vida de los electrones en un estado de energía particular estará dado por la expresión

$$\tau = \frac{\hbar}{\Sigma}$$

En el caso de que hubiera más de una perturbación, las probabilidades de transición se suman de manera que la probabilidad de que el electrón abandone un estado energético estaría dado por la suma de probabilidades de transición debida a cada interacción.

El tiempo de vida asociado a cada uno de los autoestados estacionarios del hamiltoniano sería infinito. Sin embargo, la presencia de dos perturbaciones que no habíamos considerado hasta el momento: la interacción electrón-electrón,  $H_{e-e}$ , y el término de energía potencial debido al campo de transporte  $e\phi$ , conduce a que los estados electrónicos dejen de ser totalmente estacionarios, es decir, pasen a ser *cuasi*-estacionarios y, por tanto, debemos asociarles a cada uno de ellos un tiempo de

vida finito. Por otro lado, supondremos que el campo de transporte es lo suficientemente pequeño como para considerar que no afecta al espectro energético.

La teoría del líquido de Fermi justifica en sistemas estacionarios la inclusión del efecto de la interacción electrón-electrón en el tiempo de vida, [Ashcroft,76], término que tiene en consideración el problema de los  $N$ -cuerpos. En el caso de estar a temperaturas elevadas habría que incluir, igualmente, un tiempo asociado a la posible interacción electrón-fonón.

Así pues, resumiremos el efecto sobre el GE2D del campo eléctrico de transporte y de la interacción electrón-electrón en la probabilidad total de transición

$$\Sigma_{total} = \Sigma_{\phi} + \Sigma_{e-e} \quad [V.21]$$

de donde podemos obtener el tiempo de vida de cada estado a través de la expresión general

$$\frac{1}{\tau(\vec{B}, T, \phi)} = \frac{1}{\tau_{\phi}} + \frac{1}{\tau_{e-e}}$$

La dependencia que estamos incluyendo con el potencial de transporte la justificaremos en la [Parte VII] cuando analicemos los resultados experimentales basados en la dependencia de la amplitud de la magnetoconductividad diagonal con la intensidad de corriente que atraviesa el S2D, [Haug,87,2], [Nachtwei,93,1], [Nachtwei,94,2].

La [Ec.19] para la magnetoconductividad diagonal representa el efecto Shubnikov-de Haas (SdH) cuyo comportamiento general está caracterizado en la [Fig.11], para las condiciones indicadas en la misma. La consecuencia fundamental de los efectos cuánticos se traduce en la aparición de oscilaciones de esta magnetoconductividad a alto campo magnético, que constituyen un resultado bien establecido. Sin embargo, como vemos en esta figura, hay una característica diferenciadora en el caso de los S2D: La aparición de intervalos del campo magnético para los que se hace cero la magnetoconductividad diagonal.

Resumiendo, el paso del coeficiente cinético  $\sigma_{xx}$  semiclásico al correspondiente cuántico se obtiene haciendo los siguientes cambios sobre la expresión semiclásica

$$\begin{aligned} n_0 &\rightarrow N \\ \tau &\rightarrow \tau(\vec{B}, T, \phi) \end{aligned} \quad [IV.22]$$

siendo  $\tau(\vec{B}, T, \phi)$  el tiempo de vida del estado electrónico y  $N$  la densidad de electrones del GE2D próximos al nivel de Fermi, [Ec.17].

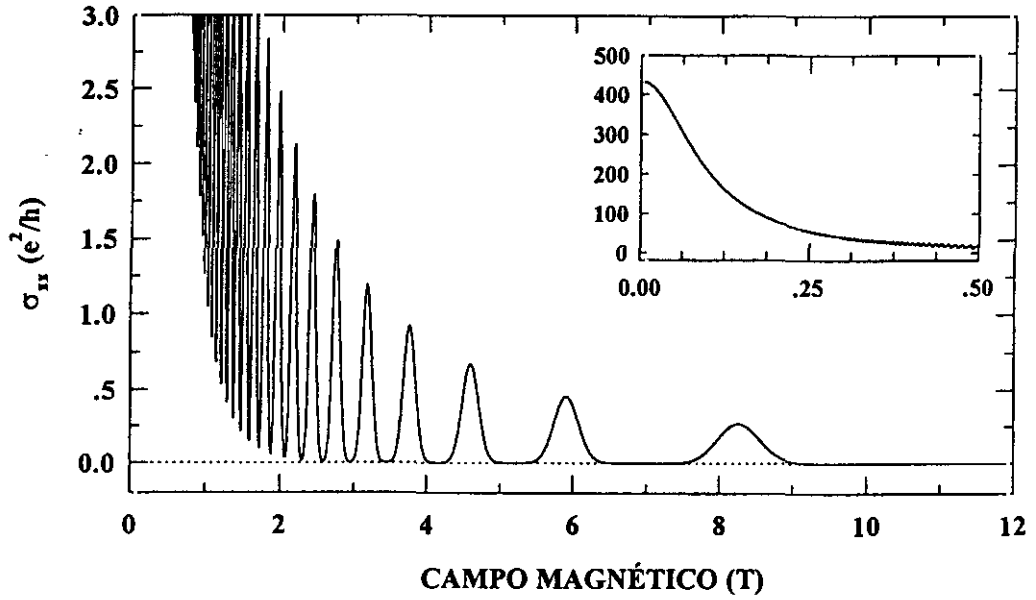


Figura 11: Simulación de la magnetoconductividad diagonal,  $\sigma_{xx}$ , para un S2D con  $n_0=10^{16}m^{-2}$ ,  $E_F=35meV$ ,  $T=1.2K$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ . En la figura interior se muestra el comportamiento semiclásico en estas mismas condiciones.

Hay una forma global de presentar ambas magnetoconductividades en condiciones de EHC, a través de diagramas  $\sigma_{xx}$  vs  $\sigma_{xy}$ , [Pruisken,88,2]:

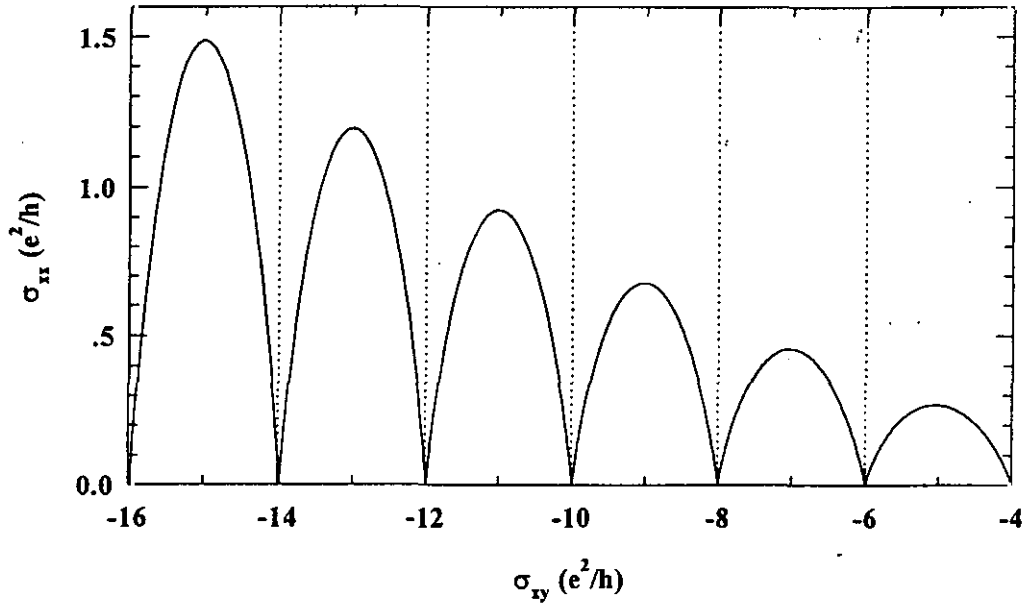


Figura 12:  $\sigma_{xx}$  vs  $\sigma_{xy}$  para un S2D con  $n_0=10^{16}m^{-2}$ ,  $E_F=35meV$ ,  $T=1.2K$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ .

Al ser los puntos  $\sigma_{xx}=0$  puntos fijos, estos diagramas pueden considerarse como diagramas de fase, interpretando el paso de cada nivel de Landau por el nivel de Fermi como si de una transición de fase se tratara. Haciendo uso de las expresiones que hemos deducido para ambas

de fase se tratara. Haciendo uso de las expresiones que hemos deducido para ambas magnetoconductividades, [Ec.18] y [Ec.12], en estos diagramas se representan los puntos correspondientes a la ecuación siguiente

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = -\omega_c \tau \frac{n}{N} \quad [\text{IV.23}]$$

### 3.4. MAGNETORRESISTENCIAS HALL Y DIAGONAL

Una vez que se tienen calculadas las magnetoconductividades diagonal y Hall, se puede obtener las magnetorresistividades a través de las [Ec.II.7]. De éstas, a su vez, es inmediato calcular las magnetorresistencias a partir del conjunto de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} R_{xx} &= \frac{l}{a} \rho_{xx} \\ R_{xy} &= \rho_{xy} \end{aligned} \quad [\text{IV.24}]$$

donde  $l$  y  $a$  son la longitud y el ancho del S2D, respectivamente. Luego, tanto las magnetorresistencias como las magnetorresistividades tienen las mismas unidades.

El comportamiento general de estas magnitudes es similar al descrito para las magnetoconductividades: Los intervalos de campo magnético para los mínimos o ceros de las oscilaciones SdH en  $R_{xx}$  coinciden con los correspondientes a las mesetas Hall de  $R_{xy}$ .

Sin embargo, en ambas magnetorresistencias aparecen mezclados los efectos de transporte y ensanchamiento de los niveles de Landau, lo que complica su análisis físico. Por esta razón, el modelo teórico conviene desarrollarlo a partir de las magnetoconductividades donde estas dos contribuciones aparecen, a altos campos magnéticos, perfectamente separadas.

En la [Fig.13] representamos la [Ec.24]. Esta se ha generado de manera que presente mesetas a valores de índice impar, consecuencia de la ruptura de la degeneración de espín de los niveles de Landau. Para conseguirla hemos realizado la simulación usando una temperatura muy baja, aumentando el factor giromagnético generalizado e introduciendo como niveles de Landau *lorentzianas* de ancho  $\Gamma$  muy pequeño y constante.

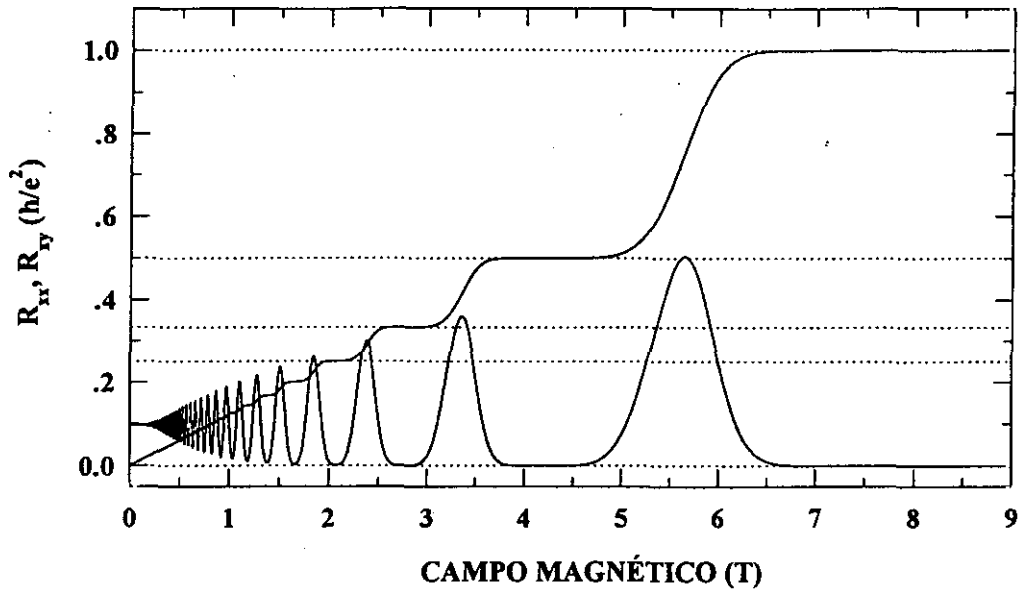


Figura 13: Simulación de las magnetorresistencias Hall y diagonal para un S2D con  $n_0=2 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ ,  $T=0.3 \text{ K}$ ,  $l/a=3.5$  y  $m^*=0.067m_0$ .

En la [Parte III], discutimos la diferencia que existía entre el uso de un perfil *lorentziano* o *gaussiano* para representar los niveles de Landau.

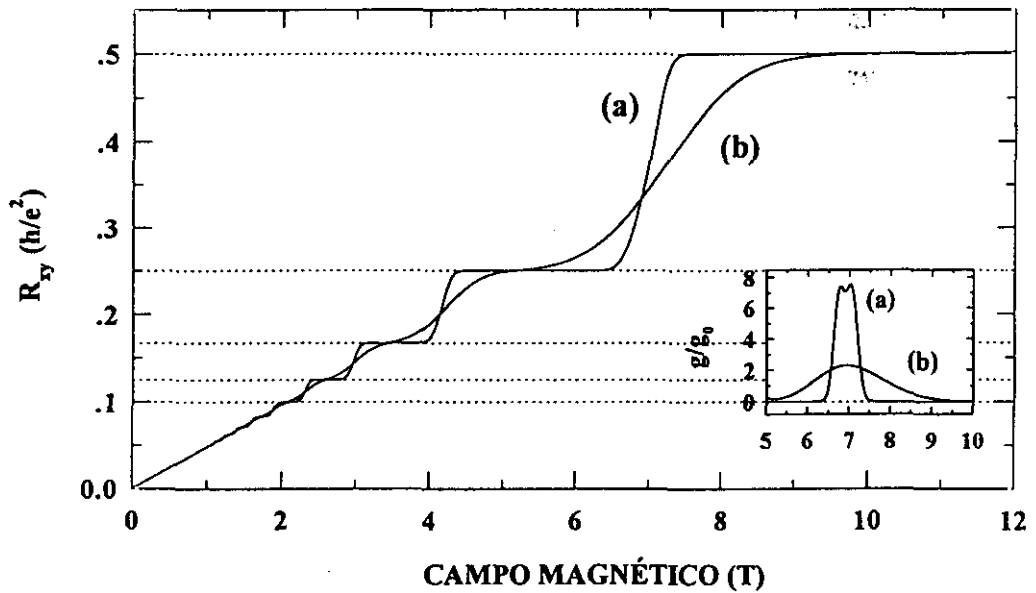


Figura 14: Simulación de la magnetorresistencia Hall para un S2D con  $n_0=5 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ ,  $T=1.2 \text{ K}$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ . En la figura insertada se representa para estas mismas condiciones una oscilación de la densidad de estados. (a) gaussiana. (b) lorentziana.

En la [Fig.14] presentamos una simulación de la magnetorresistividad Hall para cada uno de perfiles, considerando para ambos un mismo  $\Gamma$  constante. Por otro lado, en la figura insertada se observan los perfiles para cada una de las correspondientes oscilaciones de la densidad de estados. La conclusión es clara, la única diferencia desde el punto de vista del modelo entre utilizar una forma *lorentziana* o *gaussiana* reside en la peor o mejor definición de los niveles de Landau, mayor en el caso de la *gaussiana*.

## 4. PROPIEDADES DE MAGNETOTRANSPORTE EN FUNCIÓN DE LA TENSIÓN DE PUERTA

### 4.1. INTRODUCCIÓN

La ventaja de las heteroestructuras que tienen puerta, [Parte I], es la posibilidad de variar la posición del nivel de Fermi aplicando una tensión a la misma, lo que implica una variación de la densidad de electrones en el GE2D. De esta forma fué como primero se empezó a estudiar la magnetoconductividad diagonal, [Fowler,66], y las magnetorresistencias diagonal y Hall, [Kawaji,75,1], [Igarashi,75], [Wakabayashi,78,1], [Kawaji,85,2], y como se descubrió finalmente el EHCE, [Klitzing,80,1]. Paradójicamente, este enfoque del EHC está completamente abandonado desde un punto de vista teórico. La razón fundamental es que con semejantes experiencias se pone claramente de manifiesto el carácter termodinámicamente abierto de todo S2D real y, en concreto, el hecho de que la carga electrónica del GE2D está determinada por el resto de la heteroestructura. Carácter de sistema abierto que no puede incluirse en los argumentos de Laughlin, basados en la invariancia *gauge*; ni en los de Büttiker, donde la razón del fenómeno se fundamenta exclusivamente en la presencia de estados de borde en el S2D, (véase el [Apartado 6]).

En el presente apartado extendemos las ideas del modelo desarrolladas en los apartados anteriores a esta nueva situación.

En las experiencias se fija el valor del campo magnético aplicado habitualmente a un valor alto,  $B_0$ , con la intención de que se manifiesten claramente los efectos de cuantización en el S2D; una vez hecho esto, se varía de forma continua la tensión de puerta aplicada a la heteroestructura. De esta forma exploramos la estructura de niveles de Landau fijada por el campo magnético.

Así pues, como hicimos en el caso del análisis en campo magnético, empezaremos calculando la densidad de estados. La ecuación viene dada nuevamente por la [Ec.III.26], pero la variable ahora corresponderá al nivel de Fermi, siendo la frecuencia ciclotrón, al estar fijo el campo magnético, una constante dada por la expresión

$$\omega_c^0 = \frac{eB_0}{m^*} \quad [\text{IV.25}]$$

donde  $B_0$  es el campo magnético aplicado. Por tanto, la densidad de estados será

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X] \right\} \quad [\text{IV.26}]$$

donde el argumento  $X$  viene ahora dado por

$$X = 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar\omega_c^0} - \frac{1}{2} \right) \quad [\text{IV.27}]$$

En la [Fig.15] representamos la [Ec.31] para una variación del nivel de Fermi de la forma:  $E_F(\text{eV}) = E_F^{\text{inicial}} + 0.002V_g(\text{V})$ .

El análisis de la densidad de estados en función la tensión de puerta brinda la posibilidad de observar la estructura particular de niveles de Landau a un determinado campo magnético.

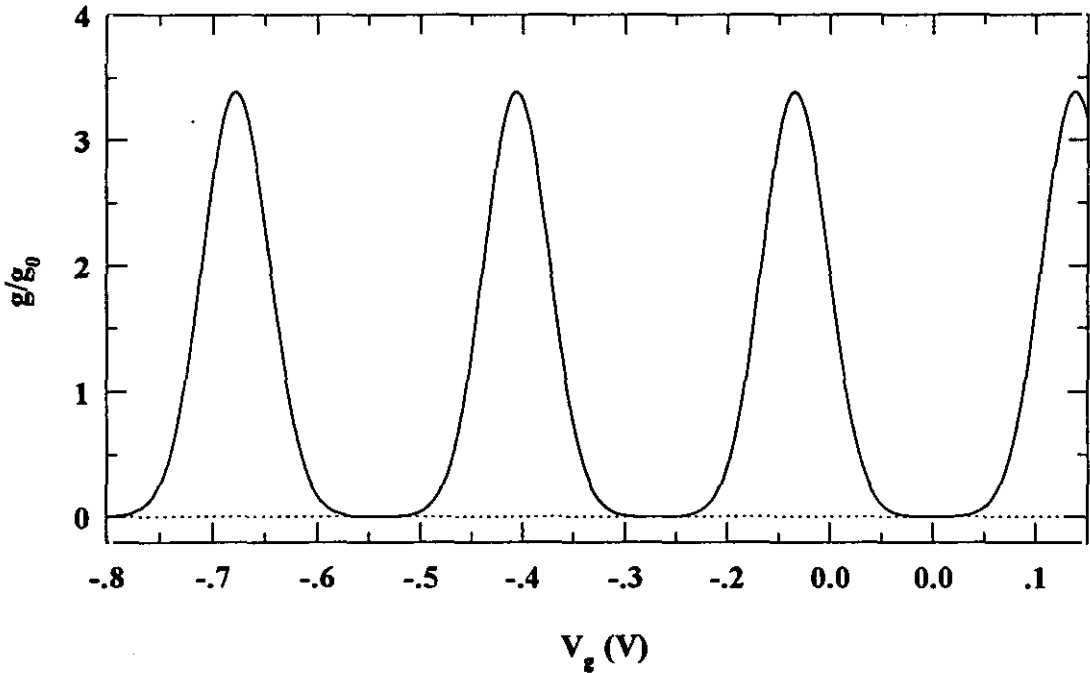


Figura 15: Simulación de la densidad de estados en función de la tensión de puerta para  $B_0=8\text{T}$ ,  $T=1.2\text{K}$ ,  $m^*=0.067m_0$ .



## 4.2. MAGNETOCONDUCTIVIDAD HALL

Una vez obtenida la densidad de estados podemos abordar el cálculo de las diferentes magnitudes físicas. Así, siguiendo los pasos que dimos en el análisis en función del campo magnético, estudiaremos el EHCE en función de la tensión de puerta. Para ello necesitaremos conocer la densidad de electrones en el GE2D. Integrando de forma similar a como hicimos para llegar a la [Ec.3], tenemos en este caso

$$n = n_0 + \frac{2eB_0}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} A_{s,p} A_{r,p} A_{t,p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad [\text{IV.28}]$$

donde ahora  $n_0$  varía con el nivel de Fermi. En la figura siguiente representamos esta ecuación en función de la tensión de puerta.

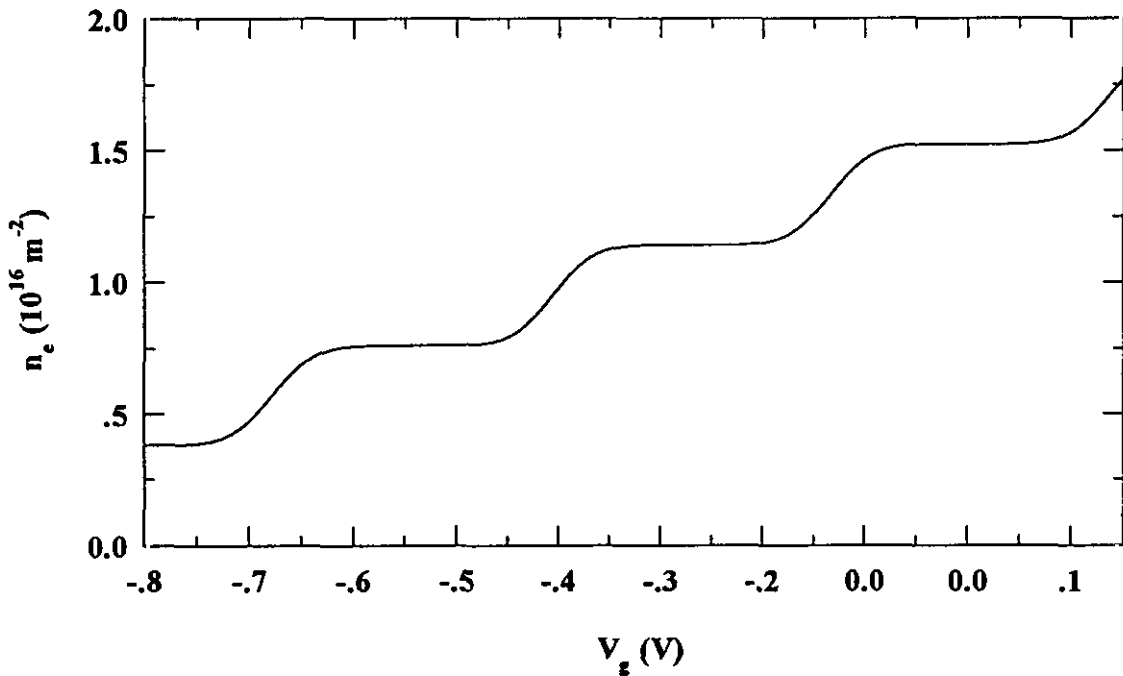


Figura 16: Simulación de la densidad de electrones en función de la tensión de puerta para un S2D en las mismas condiciones que la [Fig.15].

Este comportamiento es físicamente razonable: Aparecen regiones de tensión de puerta para las que no hay variación alguna de la densidad de electrones cuando atravesamos con el nivel de Fermi una región energética entre dos niveles de Landau. Si comparamos con las [Fig.17] y [Fig.18],

para las magnetoconductividades Hall y diagonal, observamos que esas regiones de tensión de puerta coinciden exactamente con las correspondientes a las mesetas Hall y los mínimos de la magnertorresistencia diagonal.

Una vez determinado el comportamiento de la densidad de electrones, es inmediato obtener la forma de la magnetoconductividad Hall a través de la [Ec.13], que supone estar en condiciones de alto campo magnético. De forma que en las simulaciones usaremos la ecuación siguiente para el EHCE

$$\sigma_{xy} = -\frac{en}{B} = -\frac{e}{B}(n_0 + \delta n) \quad [\text{IV.29}]$$

que está representada en la [Fig.17]. Observamos la presencia de mesetas únicamente a valores pares, como ocurría al estudiar el EHCE en función del campo magnético, es debido a la degeneración de espín.

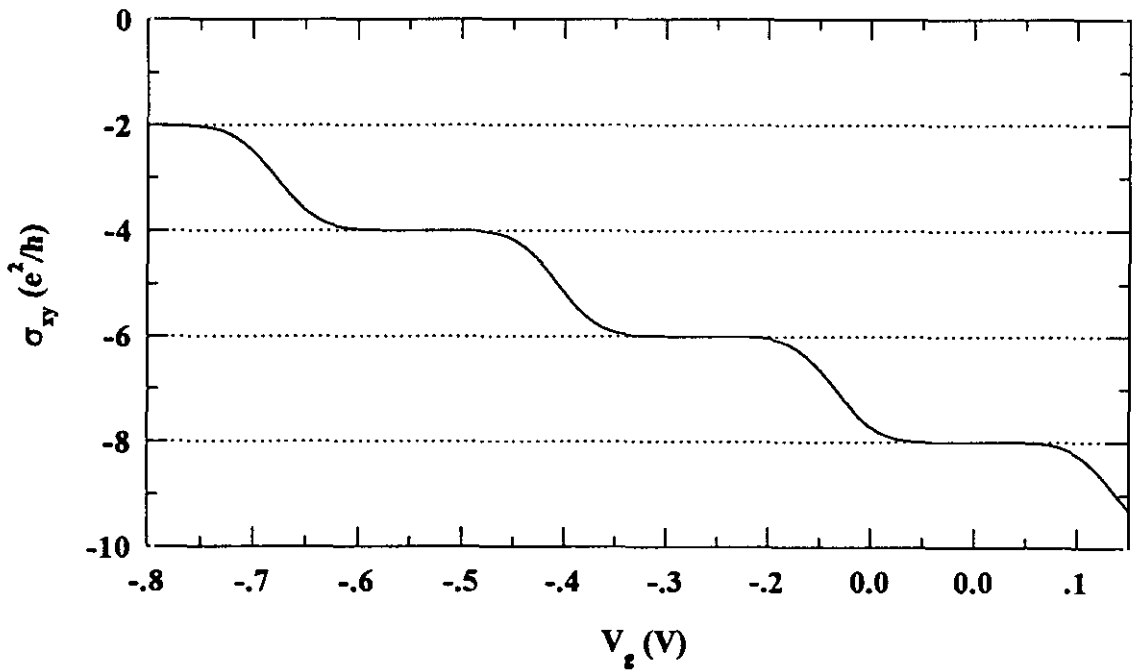


Figura 17: Simulación de la magnetoconductividad Hall en función de la tensión de puerta para las mismas condiciones detalladas en la [Fig.15].

### 4.3. MAGNETOCONDUCTIVIDAD DIAGONAL

De la misma forma que hemos hecho al estudiar la magnetoconductividad Hall en el apartado anterior, en éste emplearemos la [Ec.19] para determinar el efecto SdH en el que, suponiendo que estamos en condiciones de alto campo magnético, no consideramos el término de bajo campo

$$\sigma_{xx} = \frac{en_0}{B\omega_c\tau} \frac{g(E_F)}{g_0} \quad [\text{IV.30}]$$

En la [Fig.18] representamos esta función cuyos mínimos coinciden perfectamente con las mesetas descritas en la [Fig.17]. El problema fundamental que se presenta a la hora de estudiar teóricamente este coeficiente cinético, es el comportamiento del tiempo de vida con la tensión de puerta. Este parámetro está determinado por las características particulares del sistema semiconductor, siendo imposible *a priori* predecir su forma.

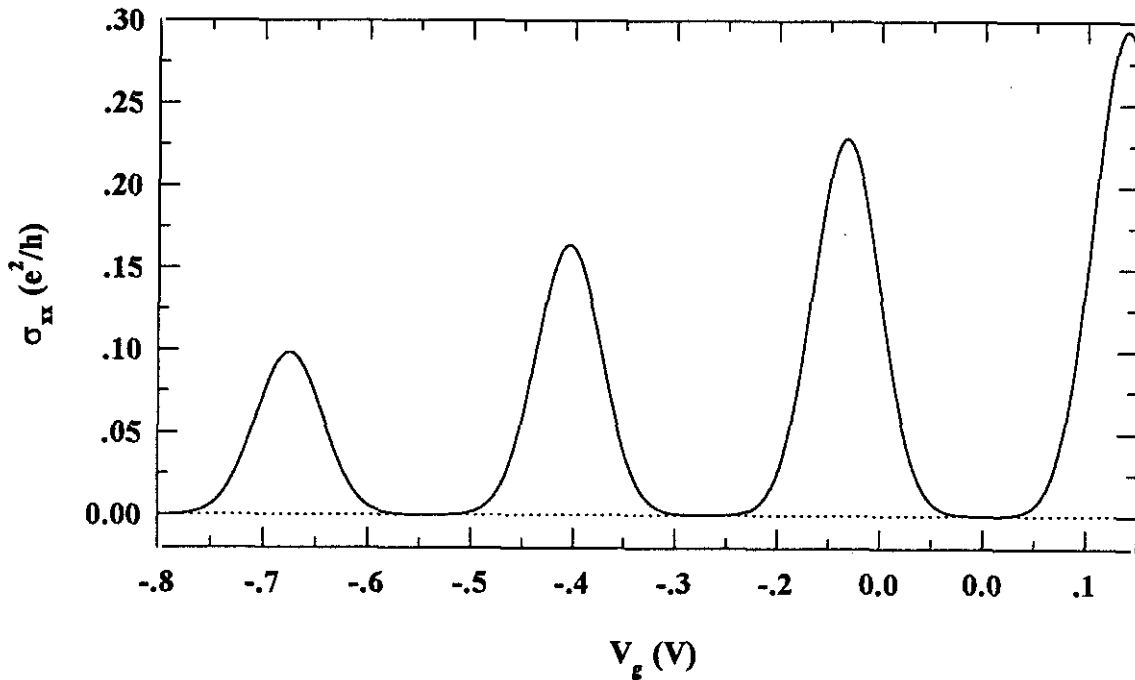


Figura 18: Simulación de la magnetoconductividad diagonal en función de la tensión de puerta en las mismas condiciones detalladas en la [Fig.15].

#### 4.4. MAGNETORRESISTENCIAS HALL Y DIAGONAL

De forma similar a como hicimos en el apartado correspondiente al EHCE en función del campo magnético, [Apartado 3.4], podemos obtener las curvas de las magnetorresistencias diagonal y Hall invirtiendo la [Ec.II.7] y usando la [Ec.24]. Así obtenemos el comportamiento típico que viene representado en la siguiente figura

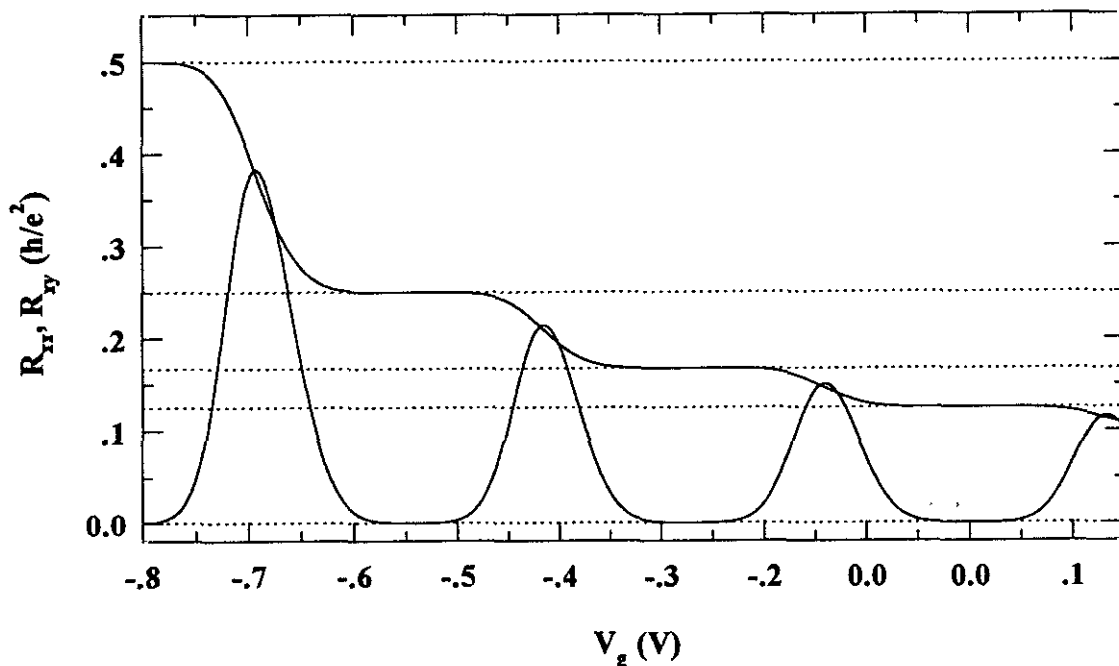


Figura 19: Simulación de la magnetorresistencia diagonal y Hall en función de la tensión de puerta para las mismas condiciones detalladas en la [Fig.15].

#### 5. EFECTO HALL CUÁNTICO Y SHUBNIKOV-de HAAS PARA EL CASO DE DOS SUBBANDAS

En los últimos años han despertado gran interés los pozos cuánticos con una segunda subbanda ocupada, [Smith,88,3], [Leadley,89], [Lo,91,1], [Schacham,92], [Fernández,92], [Lo,95,2]. Esto nos sugirió ampliar nuestro modelo a este tipo de situaciones.

Salvo por la interacción electrón-electrón que, como veíamos en el [Apartado 3.3], su efecto puede resumirse en un tiempo de vida adicional, nuestro estudio se basa en la aproximación de

electrones *cuasi*-libres. Además, supondremos que no existe interacción entre ambas subbandas y podemos, por tanto, considerarlas como independientes. Esto se traduce para nosotros en una aditividad de la densidad de estados al nivel de Fermi que de forma general expresaremos a través de la ecuación

$$g_{total}(E) = g^1(E) + g^2(E) \quad [IV.31]$$

donde la densidad de estados para cada subbanda viene dada por la ecuación

$$g^i(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p}^i A_{r,p}^i \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar \omega_c^i} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad [IV.32]$$

Siguiendo exactamente los mismos pasos que hemos empleado en los apartados anteriores y basándonos en la ausencia de interacción entre las subbandas, podemos extender de forma trivial el cálculo de todas las magnitudes físicas. Así pues, integrando la densidad de estados, [Ec.31], obtenemos de forma inmediata la fluctuación total en la densidad de electrones, quedándonos

$$\delta n = \delta n^1 + \delta n^2 = \frac{2eB}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} \left\{ A_{s,p}^1 A_{r,p}^1 A_{T,p}^1 \sin[X_F^1] + A_{s,p}^2 A_{r,p}^2 A_{T,p}^2 \sin[X_F^2] \right\} \quad [IV.33]$$

donde el argumento está dado ahora por la expresión

$$X_F^i = \frac{E_F^i}{\hbar \omega_c^i} = \frac{m^* n_0^i}{\hbar e B g_0} \quad [IV.34]$$

y que nos lleva de forma inmediata a la magnetoconductividad Hall para el caso de dos subbandas ocupadas. Así, tendríamos, para altos campos magnéticos la ecuación

$$\sigma_{xy} = -\frac{e}{B} (n_0^1 + n_0^2 + \delta n^1 + \delta n^2) = -\frac{e}{B} (n^1 + n^2) \quad [IV.35]$$

De igual forma podemos obtener la magnetoconductividad diagonal a  $T=0K$

$$\sigma_{xx} = \frac{e}{Bg_0} \left( \frac{n_0^1 g^1(E_F)}{\omega_c^1 \tau^1} + \frac{n_0^2 g^2(E_F)}{\omega_c^2 \tau^2} \right) \quad [IV.36]$$

donde las densidades de estado para cada subbanda están dadas por la [Ec.32], y  $\tau^1$  y  $\tau^2$  representan los tiempos de vida de los estados energéticos de los electrones en cada una de las subbandas.

Una vez que tenemos estas dos magnitudes, utilizando de nuevo la [Ec.II.7], podemos encontrar las magnetorresistividades Hall y diagonal que con la [Ec.24], nos permite calcular las correspondientes magnetorresistencias representadas en la [Fig.20].

Como vemos ya no aparecen las mesetas de efecto Hall a valores enteros sino que sus posiciones están peor determinadas. Esto es debido al desfase existente en la aparición al nivel de Fermi de los niveles de Landau de cada subbanda.

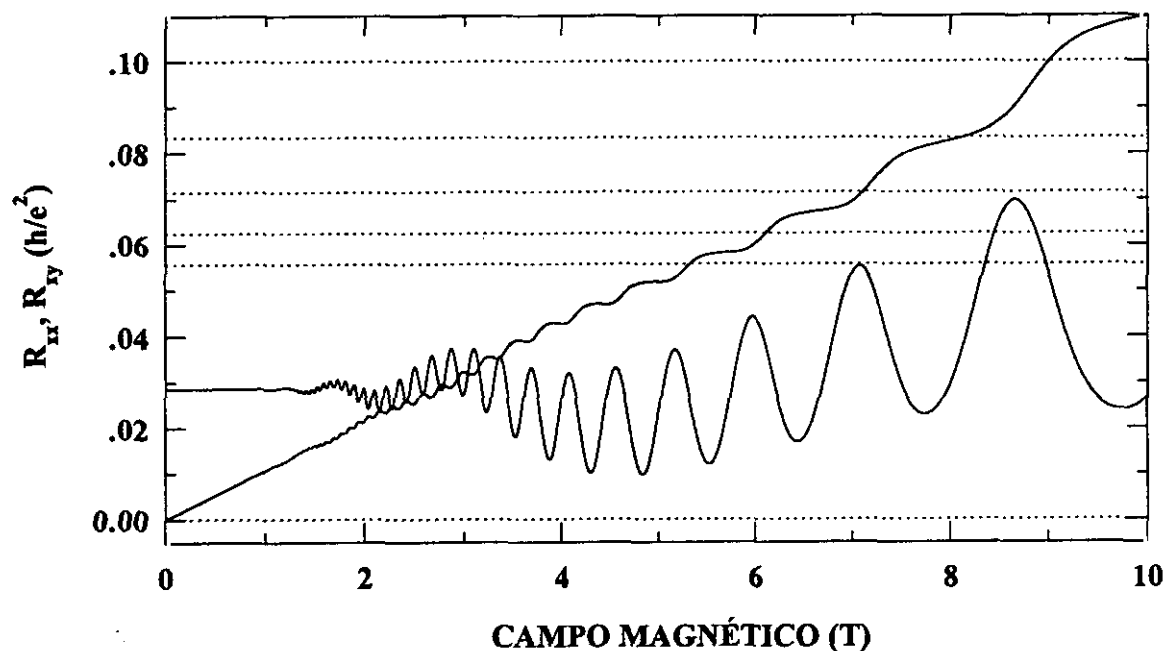
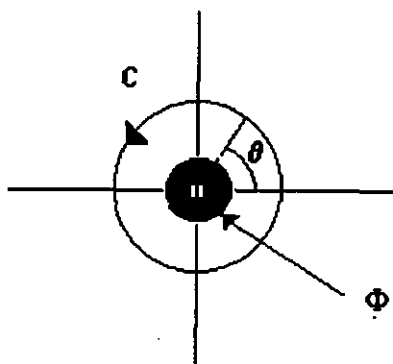


Figura 20: Magnetorresistencia Hall y diagonal para el caso de dos subbandas.  $n_0^1 = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ ,  $n_0^2 = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ ,  $T = 1.2 \text{ K}$ ,  $m^{*1} = 0.067 m_0$ ,  $m^{*2} = 0.067 m_0$ .

## 6. OTROS MODELOS TEÓRICOS SOBRE EL EFECTO HALL CUÁNTICO ENTERO

Desde la aparición del EHCE, [Klitzing,80,1], diversos modelos han sido desarrollados, todos con un mismo denominador común: el modelo de invariancia *gauge* y el concepto de *gap* de movilidad de Mott. Este enfoque tiene su origen en el modelo desarrollado por Laughlin, [Laughlin,81,1]. Para entender su enfoque del problema del EHC es necesario explicar brevemente la cuantización de flujo. Consideremos un plano con una región circular en la que hay un flujo en su interior,  $\Phi$



Supongamos que no hay campo magnético en otro lugar del plano. Así, el potencial vector en este plano es un *gauge* puro, es decir:

$$\vec{A} = \nabla f$$

que no puede llevarse a cero a través de una transformación *gauge*, ya que necesariamente tenemos

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \Phi$$

siendo  $C$  el contorno que encierra la región de flujo magnético, (véase la figura anterior). Así pues, una posible solución sería

$$f = \frac{\Phi \theta}{2\pi} \quad [\text{IV.37}]$$

donde  $\theta$  es el ángulo alrededor de la región de flujo medido desde un eje arbitrario. Consideremos un electrón que se mueve en el plano, y supongamos que su función de onda se anula en esta región. Sin embargo, está afectado por el flujo ya que su hamiltoniano depende del potencial vector, que no es nulo en ningún punto del plano. Puesto que el potencial vector es un *gauge* puro, podemos intentar suprimirlo de la ecuación de Schrödinger a través de la transformación *gauge* siguiente

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla f$$

Haciendo esto, la función de onda del electrón adquiere el factor de fase

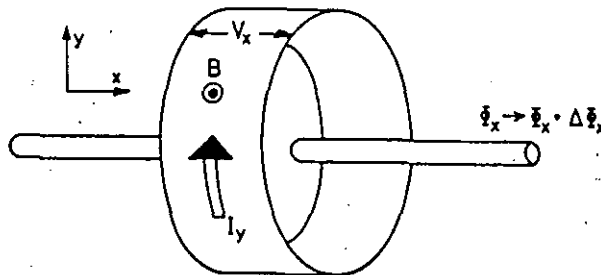
$$\exp\left\{-i \frac{ef}{\hbar}\right\} = \exp\left\{-i\theta \frac{e\Phi}{h}\right\}$$

que no es físicamente aceptable puesto que la función de onda sería discontinua en el espacio (cada vez que  $\theta$  se incrementa en  $2\pi$  damos una vuelta completa a la región del flujo). Esta dificultad puede superarse en dos circunstancias determinadas: a) El electrón es localizado, es decir, su función de onda es diferente de cero sólo en la proximidad de un punto determinado. En este caso, donde la [Ec.37] puede llevar a una discontinuidad, la función de onda se anula. Este argumento no puede utilizarse en el caso de electrones libres pero sí para un electrón atrapado en una impureza. b) El electrón es extendido con una función de onda que es coherente en fase alrededor de  $C$  pero el flujo está cuantizado en múltiplos enteros del cuanto de flujo

$$\Phi_0 = \frac{h}{e}$$

De este modo, la [Ec.37] llega a ser una función periódica de  $\theta$  y representa entonces una transformación *gauge* físicamente aceptable, es decir, que deja invariante la ecuación de Schrödinger. En estas condiciones, el potencial vector desaparece de la ecuación y el electrón no ve la presencia del flujo a través de la región central.

El modelo de Laughlin se fundamenta en un experimento ideado por él mismo y resumido en la siguiente figura, [Butcher,93]:



Con esta geometría, es claro que para su análisis es más apropiado tomar el *gauge* de Landau, [Ec.III.9]. Consideremos ahora un conjunto de electrones confinados en el cilindro de la figura anterior con un campo magnético aplicado perpendicularmente a la superficie del mismo. Supongamos que el flujo total que atraviesa el cilindro es  $\Phi_x$  y está confinado en el solenoide interior. Provoquemos una variación adiabática del flujo del solenoide interior en una cantidad  $\Delta\Phi_x = h/e$ . La variación del flujo hace un trabajo sobre el sistema electrónico que se traduce en la aparición de una corriente dada, utilizando la ley de Faraday, obtenemos en este caso la expresión

$$\Delta W = - \int dt I_y \frac{d\Phi}{dt} = -I_y \frac{h}{e}$$

Por otro lado, como acabamos de discutir, este cambio de flujo en un *cuanto* está acompañado de un cambio de *gauge* que no modifica los autovalores de la energía del hamiltoniano, de manera que el sistema ha de ser el mismo antes y después del cambio. Así, cuando la energía de Fermi del sistema se encuentra en la región de estados localizados las regiones de estados extendidos ocupados antes del cambio de *gauge* han de estar ocupados también después. Igualmente, la ocupación de los estados localizados no se modifica. Sin embargo, este cambio es adiabático y la variación de energía que se produce en el sistema con la aparición de una corriente debe estar compensada exactamente con algún otro término energético. La única posibilidad que puede darse es el cambio en la ocupación de los estados de borde, [Halperin,82,1], es decir, que los electrones se transfieran de un borde de la muestra a otro. Así pues, consideremos que  $n$  electrones sufren esta transferencia, entonces, la energía potencial del mismo se incrementa una magnitud  $\Delta E$  dada por la ecuación

$$\Delta E = -enV_x$$



donde  $V_x$  es el potencial electrostático que aparece al acumularse carga en los bordes del sistema. Así, tenemos que

$$0 = \Delta E + \Delta W = -enV_x - I_y \frac{h}{e}$$

de donde, operando llegamos a la ecuación

$$\frac{I_y}{V_x} = \sigma_{xy} = -n \frac{e^2}{h}$$

que constituye el resultado fundamental de Laughlin. Esta cuantización de la magnetoconductividad Hall se sigue directamente de la suposición de que el nivel de Fermi se encuentra dentro del *gap* de movilidad. Además, Laughlin necesita hacer implícitamente la suposición de que la intensidad  $I_y$  es una supercorriente, es decir que no hay disipación de energía por efecto Joule en el sistema.

Posteriormente Halperin introdujo el concepto de estado de borde que ha sido utilizado en los últimos años para desarrollar un enfoque fenomenológico alternativo al de Laughlin, el formalismo de Landauer-Büttiker, [Büttiker,86,1], [Büttiker,88,2]. Este supone que el sistema está conectado a *reservas* que sirven, por un lado, de fuente y sumidero de corriente y, por otro, de conexiones de voltaje.

Tomemos inicialmente un sistema de dos conexiones a dos reservas con potenciales químicos  $\mu_1$  y  $\mu_2 = \mu_1 + eV$ , donde  $V$  es el voltaje aplicado. De este modo, hay una corriente neta de derecha a izquierda proporcional al número de estados en el intervalo  $\mu_2 - \mu_1$  y dada por la ecuación

$$I = e \sum_i^{N_c} v_i \frac{dn_i}{dE} eV \sum_j^{N_c} T_{ij} = \left( \frac{e^2}{h} \sum_{i,j} T_{ij} \right) V \quad [\text{IV.38}]$$

donde  $N_c$  es el número de canales existentes en el sistema, incluyendo el espín;  $v_i$  la velocidad longitudinal para el canal  $i$ -ésimo al nivel de Fermi,  $T_{ij}$  la probabilidad de transmisión del canal  $j$  al  $i$ , y  $dn_i/dE = 1/hv_i$  la densidad de estados para un S1D, [Apéndice 1]. Esta ecuación nos permite obtener una expresión para la conductancia en términos del coeficiente de transmisión  $T$  (normalizado a  $N_c$ )

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{i,j} T_{ij} \equiv \frac{e^2}{h} T$$

Dado que el coeficiente de conductancia se expresa en función de la unidad fundamental de conductancia,  $e^2/h$ , multiplicada por el coeficiente de transmisión, es inmediato deducir que la cuantización de estos coeficientes de transmisión lleva a la cuantización de los coeficientes de

transporte en unidades de  $e^2/h$ . En caso de que supongamos ausencia de dispersión en la muestra, es decir,  $T_{ij} = \delta_{ij}$ , entonces la [Ec.38] lleva a

$$G = 2N_c \frac{e^2}{h}$$

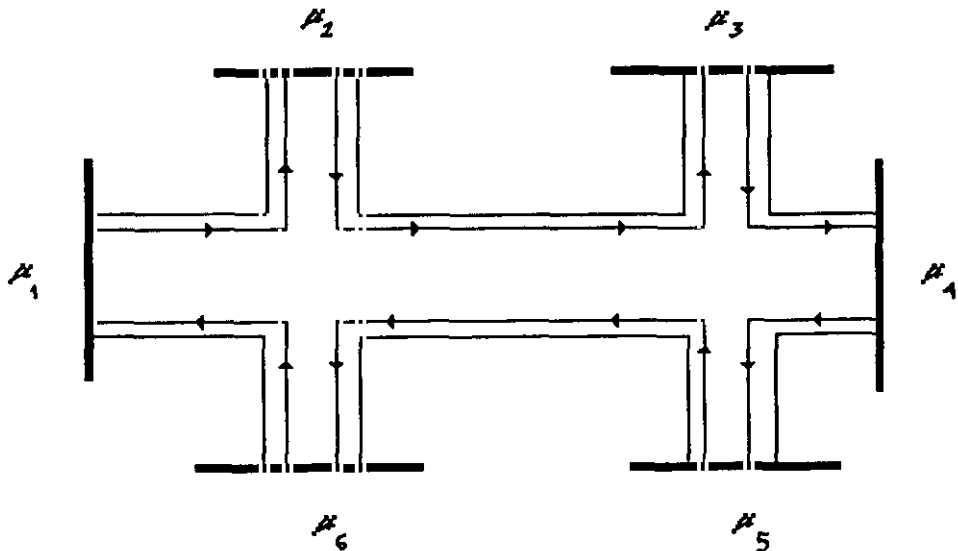
donde el factor 2 se refiere a la degeneración de espín. Este es el efecto que aparece en los puntos e hilos cuánticos, (véase el [Apartado 2] de la [Parte VIII]).

Büttiker generalizó estas ideas a un sistema conectado a  $N_L$  reservas donde cada par puede servir como fuente y sumidero de corriente y, además, entre los dos puede introducirse un voltaje. En este caso tenemos una matriz de conductancia de coeficientes  $G_{mn}$  de forma que

$$I_m = \sum_n^{N_L} G_{mn} V_n = \frac{e^2}{h} \sum_n^{N_L} (T_{mn} - N_c \delta_{mn}) V_n \quad [\text{IV.39}]$$

donde  $T_m$  es la corriente total por la trayectoria  $m$ ,  $V_n$  el voltaje aplicado a la trayectoria  $n$ , y  $T_{mn}$  es el coeficiente de transmisión total (o coeficiente de reflexión en el caso de que  $m=n$ ) al nivel de Fermi para los electrones inyectados en la trayectoria  $n$  y recolectados por la  $m$ . En el caso  $N_L=2$  esta ecuación se reduce a la [Ec.38]. Si se conoce el coeficiente de transmisión  $T_{mn}$  podemos invertirla para obtener la resistencia Hall si  $m \neq n$ . El interés que tiene para nosotros la [Ec.39] reside en su validez para cualquier valor del campo magnético.

Tomemos ahora la fórmula anterior para el caso particular de un sistema con seis contactos como el que se describe en la siguiente figura que presenta la configuración habitual para el estudio conjunto del EHC y SdH, y sobre el que se aplica un campo magnético de forma que el nivel de Fermi está situado en la zona entre dos niveles de Landau, por lo que los únicos estados al nivel de Fermi son los estados de borde, [Halperin,82,1], [Thouless,93].



Asumamos que una corriente  $I$  pasa por el sistema a través de estos estados y que la corriente neta en las conexiones del voltaje es cero. Hay desorden en la muestra que da lugar a dispersión pero supongamos que toda la corriente continua fluyendo a través de los bordes hacia la conexión de voltaje 2, es decir, suponemos que el coeficiente de transmisión es  $T_{21}=N$ , a pesar de la dispersión. Llegado este punto, hagamos que de la *reserva* 1 surja una corriente  $N(e/h)\mu_1$ , siendo  $N$  el número de niveles de Landau por debajo del nivel de Fermi y que corresponde a lo que este formalismo denomina canales. Si toda la corriente continúa fluyendo a lo largo del borde e imponemos que la corriente en la conexión del voltaje sea despreciable, debemos tener que

$$N(e/h)(\mu_1 - \mu_2) = 0$$

Es decir,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_{\text{fuente}}$ . De igual forma para la conexión de voltaje 3, de manera que las conexiones en el lado superior del sistema (véase la figura) han de tener el mismo potencial químico que el de la fuente. Sin embargo, el sumidero se mantiene a otro potencial  $\mu_{\text{sumidero}}$ , que es el mismo que para las conexiones de la zona inferior del sistema (voltajes 5 y 6).

De modo que tenemos una corriente neta

$$I = N \left( \frac{e}{h} \right) (\mu_{\text{fuente}} - \mu_{\text{sumidero}})$$

que puede fluir sin la aparición de ningún voltaje entre dos conexiones de voltaje de un mismo lado, es decir, en condiciones para las que se cumple la ecuación  $R_{xx} \approx 0$ . Sin embargo,  $R_{xy}$ , que representa el cociente del voltaje existente entre dos trayectorias de la corriente,  $(\mu_{\text{fuente}} - \mu_{\text{sumidero}}) / e$ , dividido por la corriente neta, da lugar a

$$R_{xy} = \frac{h}{e^2 N}$$

siendo  $N$ , como dijimos, el número de estados al nivel de Fermi. Por consiguiente, esta ecuación lleva a la cuantización de la resistencia Hall.

Así pues, este argumento establece que si el coeficiente de transmisión  $T_{n,n-1}$  está cuantizado al valor  $N$ , y si el resto de coeficientes de transmisión son cero, obtenemos simultáneamente la anulación de la magnetorresistencia diagonal y la cuantización de la magnetorresistencia Hall. Este tratamiento simultáneo de ambas magnetorresistencias es la ventaja esencial del método de Landauer-Büttiker frente al de Laughlin. Sin embargo, su principal limitación es no poder justificar la existencia de la meseta Hall.

## 7. EXTENSIÓN DEL CÁLCULO TEÓRICO A LAS PROPIEDADES DE EQUILIBRIO DE UN GAS DE ELECTRONES CUASI-BIDIMENSIONAL

### 7.1. INTRODUCCIÓN

La observación del comportamiento oscilatorio de la susceptibilidad de un cristal tridimensional de bismuto, que de Haas y van Alphen realizaron en la década de los años treinta, fue la primera confirmación experimental de la existencia del espectro energético que Landau, [Landau,30,1], había predicho teóricamente al estudiar el diamagnetismo de los electrones libres. Sin embargo, transcurrieron bastantes años antes de poder explicar el fenómeno desde un punto de vista teórico. Fue Onsager, [Onsager,52], quién primero comprendió su relación con la geometría de la superficie de Fermi del material. Inmediatamente después Dingle, [Dingle,52,1], [Dingle,52,2], efectuó los primeros desarrollos cuantitativos basados en el cálculo del potencial termodinámico de un sistema electrónico en presencia de un campo magnético, aunque fueron Lifshitz y Kosevich quienes en 1954 encontraron la expresión definitiva para la susceptibilidad magnética oscilatoria. En el libro de Shoenberg hay una excelente introducción histórica sobre el origen y desarrollo del efecto de Haas-van Alphen (dHvA), [Shoenberg,84].

La susceptibilidad magnética de un sistema electrónico en campos magnéticos débiles, cuando todavía no se han manifestado los efectos cuánticos, no puede calcularse de forma general. En la teoría del líquido de Fermi se considera únicamente los electrones de conducción cerca de la superficie de Fermi, de modo que sólo puede obtenerse la parte paramagnética de la susceptibilidad de los electrones próximos a dicha superficie energética. En este caso paramagnético los espines de los electrones de la zona interior de la distribución se compensan entre sí y no contribuyen. Sin embargo, la parte diamagnética de la susceptibilidad contiene contribuciones de todos los electrones, incluyendo los del interior de la distribución, donde no puede utilizarse la teoría del líquido de Fermi. Las dos partes de la susceptibilidad tienen en general el mismo orden de magnitud y únicamente tiene significado físico real su suma. De todas formas, nosotros no vamos a estar interesados en esta susceptibilidad continua.

Supongamos ahora que los campos a los que se somete el sistema son elevados, lo que implica que se cumplan las dos desigualdades siguientes

$$kT \ll \hbar\omega_c$$

$$\omega_c\tau \gg 1$$

La primera quiere decir que la separación entre niveles de Landau es mayor que la energía térmica, y la segunda asegura el que estemos en régimen cuántico. En estos casos, la situación difiere de la anterior en que la imanación tiene una parte oscilatoria que depende del campo magnético aplicado y está determinada únicamente por los electrones de conducción cerca de la superficie de Fermi. Este es el efecto de dHvA. Por supuesto, seguimos teniendo la parte continua de la imanación de los electrones.

## 7.2. EFECTO DE de HAAS-van ALPHEN

En los apartados anteriores vimos que el campo magnético modifica, en los sistemas que presentan EHC, la densidad de electrones del GE2D. La consecuencia inmediata de esta variación es la aparición de una parte oscilatoria en la imanación en correspondencia con la fluctuación que se produce en la densidad de electrones, [Ec.3].

Así es, la relación entre esta fluctuación y la imanación está mediada por el magnetón de Bohr de la forma, [Shoenberg,84]:

$$\delta M = -\frac{\hbar^2 n_0 \pi}{m^* B} \delta n = -\frac{E_F}{B} \delta n \quad [\text{IV.40}]$$

donde, para obtener la segunda igualdad hemos usado la [Ec.I.3]. A partir de este momento representaremos con el símbolo  $\delta M$  la parte oscilatoria de la imanación.

La [Ec.40] es válida únicamente para sistemas termodinámicamente abiertos. En el caso de sistemas cerrados, como ocurre en los S3D, la parte oscilatoria de la imanación se debe a la fluctuación del nivel de Fermi.

Si escribimos de forma explícita la fluctuación de la densidad electrónica, [Ec.3], llegamos a la expresión general del efecto dHvA para un S2D, que vendrá dada por

$$\delta M = -\frac{e\hbar n_0}{m^*} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} A_{s,p} A_{r,p} A_{t,p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad [\text{IV.41}]$$

Desde un punto de vista experimental, la medida de la parte oscilatoria de la imanación es un problema todavía abierto. En la bibliografía existen muy pocas referencias relacionadas con el tema y la totalidad están dedicadas a medidas efectuadas sobre multipozos cuánticos, [Haavasoja,84],

[Eisenstein,85,1], [Eisenstein,86,2], de las que no puede extraerse de forma simple la señal procedente de cada uno de los S2D componentes.

En la [Fig.21] representamos esta parte oscilatoria de la imanación, [Ec.41].

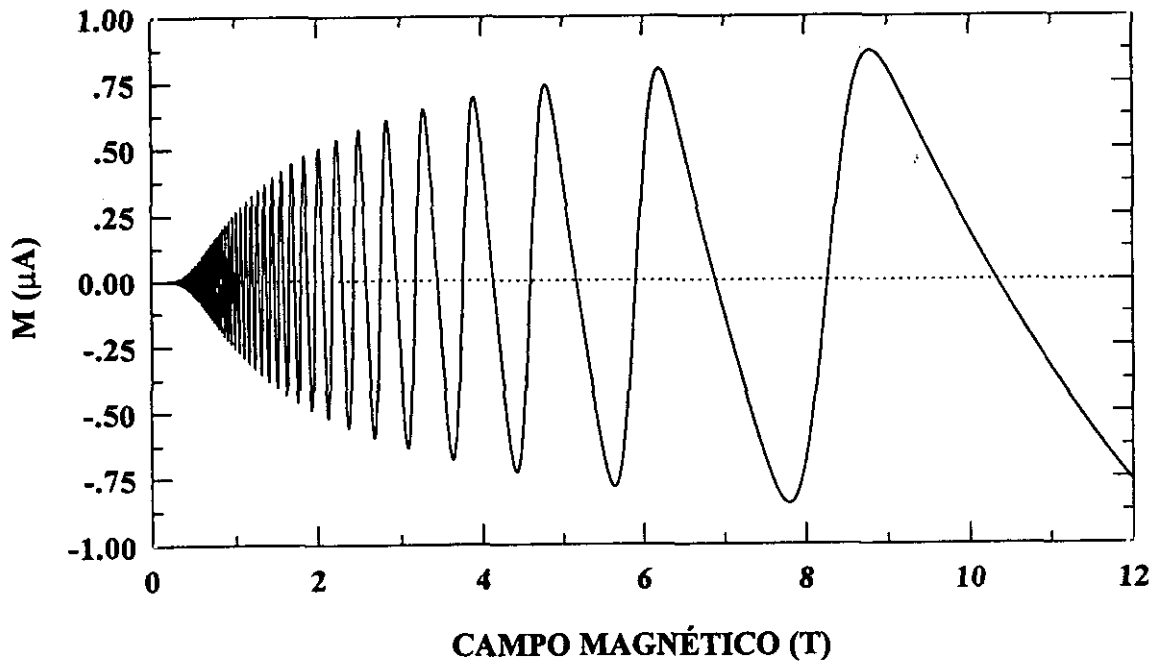


Figura 21: Simulación de la parte oscilatoria de la imanación  $\delta M$ , para un S2D con  $n_0=10^{16}m^{-2}$ ,  $E_F=35meV$ ,  $T=1.2K$ ,  $g^*=2$  y  $m^*=0.067m_0$ .

Dando la vuelta a la [Ec.40], y reagrupando términos obtenemos la expresión

$$\delta n = -\frac{B\delta M}{E_F}$$

que expresa la fluctuación de la densidad de electrones como el cociente entre la fluctuación de la energía magnética por unidad de superficie del GE2D y la energía de Fermi.

Hay una forma alternativa, desde un punto de vista termodinámico, de deducir la parte oscilatoria de la imanación en la dirección  $z$  del campo magnético aplicado. Si conocemos el potencial termodinámico, tenemos

$$\delta M = -\left(\frac{\partial \delta \Omega}{\partial B}\right)_{E_F}$$

donde  $\delta \Omega$  representa la parte oscilatoria de este potencial termodinámico. De igual forma, la fluctuación de la densidad de electrones está dada por la ecuación

$$\delta n = - \left( \frac{\partial \delta \Omega}{\partial E_F} \right)_B$$

Así pues, una vez tengamos la expresión del potencial termodinámico, podemos deducir cualquier propiedad de equilibrio del sistema: imanación, calor específico, etc. Integrando la ecuación anterior a partir de la [Ec.3], nos queda la ecuación

$$\delta \Omega = \frac{e^2 B^2}{2\pi m^*} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 p^2} A_{s,p} A_{r,p} A_{t,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad [\text{IV.42}]$$

que aparece representada a continuación.

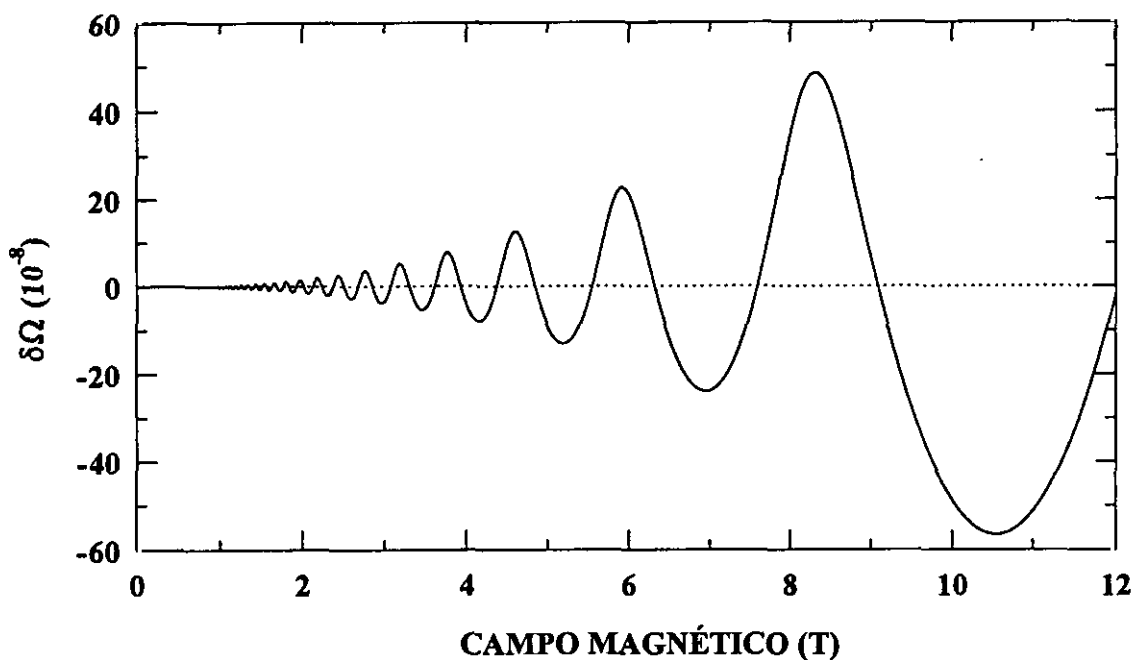


Figura 22: Simulación de la parte oscilatoria del potencial termodinámico,  $\delta\Omega$ , para un S2D en las mismas condiciones que la [Fig.21].

La [Ec.42] representa únicamente la parte oscilatoria del potencial termodinámico. Para obtener la expresión completa del mismo habría que añadir el término correspondiente a campo magnético nulo. Al estar interesados en la condiciones de EHC, esto supone temperaturas muy bajas, próximas al cero absoluto, para las que el potencial termodinámico a campo nulo estará dado por la expresión, [Huang,87], [Shoenberg,84]

$$\Omega_0 = -\frac{g_0 E_F^2}{2} = -\frac{n_0 E_F}{2}$$

Con lo que podremos expresar el potencial termodinámico de forma general como

$$\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$$

Para concluir este apartado correspondiente a las magnitudes de equilibrio es interesante obtener la parte oscilatoria de la densidad de estados al nivel de Fermi del S2D a partir del potencial termodinámico en condiciones de EHC. Así, haciendo uso de la relación termodinámica, [Shoenberg,84]:

$$g(E_F) = -\frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial E_F^2}$$

obtendríamos

$$g(E_F) = \frac{2m^*}{\hbar^2 \pi} \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X_F] = 2g_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X_F]$$

### 7.3. CALOR ESPECÍFICO

Como ya hemos mencionado, una vez que disponemos de la parte oscilatoria del potencial termodinámico,  $\delta\Omega$ , podemos obtener cualquier propiedad termodinámica de equilibrio del sistema. Hemos visto dos de ellas, la imanación y la densidad de electrones, ahora deduciremos la expresión para el calor específico del GE2D que está dado por la relación termodinámica, [Huang,87], [Callen,81]:

$$c_s = -T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_B$$

Para obtener el calor específico sí que es necesario considerar la dependencia térmica del potencial termodinámico. Sin embargo, no podemos utilizar la expresión para el potencial a campo magnético nulo, válida sólo a temperaturas muy próximas al cero absoluto, y habría que calcular la expresión general del potencial  $\Omega_0$  para una temperatura arbitraria. Inicialmente no analizaremos este problema, bien establecido en la bibliografía, [Callen,81], y estudiaremos únicamente la contribución oscilatoria del calor específico debida a los efectos cuánticos. De modo que extendiendo la ecuación anterior únicamente a la parte oscilatoria llegamos a la expresión

$$\delta c_s = -T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \delta\Omega}{\partial T} \right)_B \quad [\text{IV.43}]$$

Al efectuar estas derivadas, hay que tener muy presente que el término  $A_{T,p}$  es un término aproximado en el sentido que comentábamos en el [Apartado 2]. Por otro lado, en todo momento



haremos uso por simplicidad del nivel de Fermi en el cero absoluto en lugar del potencial químico, aproximación válida a muy bajas temperaturas.

Así, derivando cada uno de los términos del desarrollo nos queda la siguiente ecuación para el término  $p$ -ésimo del calor específico

$$\delta c_{s,p} = - \frac{z^2}{A_{T,p}} \frac{d^2 A_{T,p}}{d^2 z} \frac{\delta \Omega_p}{T}$$

donde  $\delta \Omega_p$  corresponde al término  $p$ -ésimo del desarrollo del potencial termodinámico, [Ec.42].

Desarrollando la derivada del término de temperatura obtenemos

$$\delta c_{s,p} = \left\{ 2z \frac{\cosh z}{\sinh z} - z^2 \left[ \frac{1 + (\cosh z)^2}{(\sinh z)^2} \right] \right\} \frac{\delta \Omega_p}{T}$$

Con lo que la fórmula general para la parte oscilatoria del calor específico quedaría

$$\delta c_s = \frac{e^2 B^2}{2\pi^3 m^* T} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \left\{ 2z \frac{\cosh z}{\sinh z} - z^2 \left[ \frac{1 + (\cosh z)^2}{(\sinh z)^2} \right] \right\} A_{s,p} A_{T,p} \cos[X_F]$$

donde  $z$  viene dada por la [Ec.5] y  $X_F$  por la [Ec.9]. Aún puede simplificarse más utilizando la [Ec.4]:

$$\delta c_s = \frac{e^2 B^2}{2\pi^3 m^* T} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} A_{s,p} A_{T,p} A_{T,p} \left\{ 2 \cosh z - A_{T,p} [1 + \cosh^2 z] \right\} \cos[X_F] \quad [\text{IV.44}]$$

Si asimilamos el potencial químico por el nivel de Fermi, podemos añadir a la fluctuación del calor específico el correspondiente a un gas de fermiones *cuasi*-bidimensional a campo magnético nulo dado por la relación, [Ziman,69]

$$c_s^0 = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g_0 \quad [\text{IV.45}]$$

donde  $g_0$  es la densidad de estados a campo cero dado por la [Ec.I.1], [Apéndice 1].

De modo que la expresión más general para el calor específico de un S2D en función del campo magnético puede escribirse de forma compacta como

$$c_s = c_s^0 + \delta c_s$$

Se han intentado utilizar las medidas de calor específico para obtener información sobre la densidad de estados del S2D, [Zawadzki,84], [Gornik,85,1], [Wang,88,1], [Wang,92,2]. Sin embargo, todas las medidas se efectuaron sobre multipozos cuánticos. El problema en la medida del

calor específico, como ocurre en el caso de la imanación, es la imposibilidad de obtener la señal correspondiente a un S2D al proceder ésta de todo el sistema semiconductor.

## 7.4. MAGNETOCAPACIDAD

Ultimamente se ha generado bastante bibliografía de medidas sobre magnetocapacidad diferencial, [Goodall,85], [Smith,85,1], [Smith,86,2], [Takaoka,94,2], que al ser una propiedad de equilibrio permite hacer una medida directa de la estructura de niveles de Landau.

Estas medidas de magnetocapacidad pueden efectuarse únicamente sobre heteroestructuras semiconductoras que posean puerta y están determinadas, como veremos más adelante, por la superficie de la misma.

Es inmediato extender nuestro modelo teórico para obtener teóricamente esta magnitud. Así, en general, la magnetocapacidad de un S2D puede definirse como

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{\delta C} \quad [\text{IV.46}]$$

donde con el término  $C_0$  representamos la capacidad a campo magnético nulo del S2D, que puede escribirse de la forma

$$C = \frac{\varepsilon}{d_0} S \quad [\text{IV.47}]$$

$d_0$  es la distancia media de los electrones en el pozo cuántico,  $\varepsilon$  la permitividad del medio semiconductor en el que se encuentra el GE2D y  $S$  el área de la puerta. Por otro lado, con el segundo término de la [Ec.47] tendremos en consideración el efecto de la variación de la capacidad con el campo magnético, que podemos expresar a través de la ecuación

$$\delta C = \frac{dQ}{dV} \quad [\text{IV.48}]$$

donde con  $dQ$  representaremos la variación en la carga total de cada uno de los electrodos del condensador efectivo y con  $dV$  la correspondiente variación de potencial. La densidad de carga la expresaremos mediante la relación

$$Q = en(B)$$

siendo  $n(B)$  la densidad de portadores a un campo magnético dado. Empleando ahora una aproximación variacional que ignore efectos de imagen, efectos de muchos cuerpos, la penetración de la función de onda en la barrera y los efectos de no parabolicidad de la estructura de bandas,

podremos escribir el potencial en función del nivel de Fermi de la forma, [Moloney,85], [Smith,85,1], [Mosser,86]:

$$V = \frac{E_F - E_0}{e}$$

siendo  $E_0$  la energía de la subbanda, [Parte I]. El término de la magnetocapacidad  $\delta C$  estará entonces dado por

$$\delta C = e^2 \frac{\partial n}{\partial E_F}$$

Desarrollando la derivada, es inmediato llegar a la expresión

$$\frac{\partial n}{\partial E_F} = g_0 + \frac{2eB}{\hbar\omega} 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X_F]$$

que tras reagrupar términos queda

$$\frac{\partial n}{\partial E_F} = g_0 + \frac{n_0}{E_F} 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X_F] = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X_F] \right\}$$

es decir

$$\frac{\partial n}{\partial E_F} = g(E_F)$$

Por tanto, el término adicional, [Ec.48] es

$$\delta C = e^2 g(E_F) \quad [\text{IV.49}]$$

Y así, la magnetocapacidad del S2D puede expresarse de manera general por la ecuación

$$C = \frac{S \epsilon^2 g(E_F)}{e^2 d_0 g(E_F) + \epsilon} \quad [\text{IV.50}]$$

En la [Fig.23] representamos esta magnetocapacidad en función del campo magnético. Se puede comprobar que su comportamiento general coincide perfectamente con las medidas existentes en la bibliografía, [Goodall,85], [Smith,85,1], [Smith,86,2].

Recientemente, Takaoka *et al.*, [Takaoka,94,2], han realizado un estupendo estudio experimental del comportamiento de la magnetocapacidad sobre muestras similares pero con diferente superficie de puerta,  $S$ . Variando la superficie en la [Ec.50] hemos conseguido simular completamente sus resultados, [Fig.24]

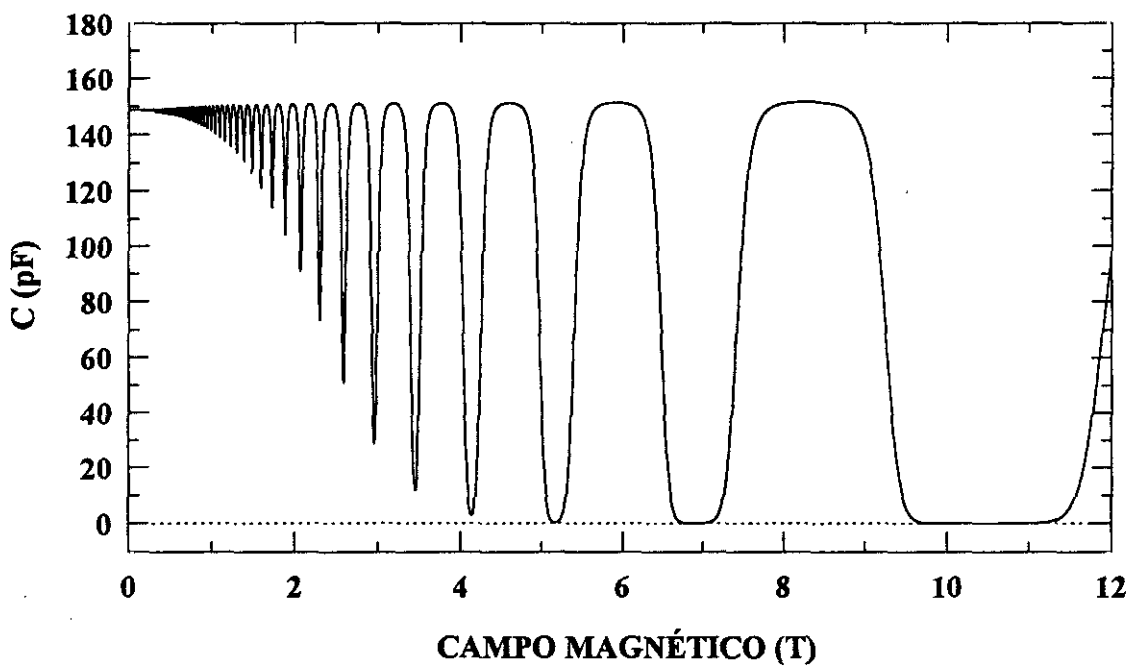


Figura 23: Simulación de la magnetocapacidad para un S2D con  $\varepsilon=1.088 \times 10^{-10}$ ,  $d_0=10^{-8} \text{ m}$ ,  $S=1.4 \times 10^7 \text{ m}^2$ , el resto de condiciones son las mismas que las correspondientes a la [Fig.21].

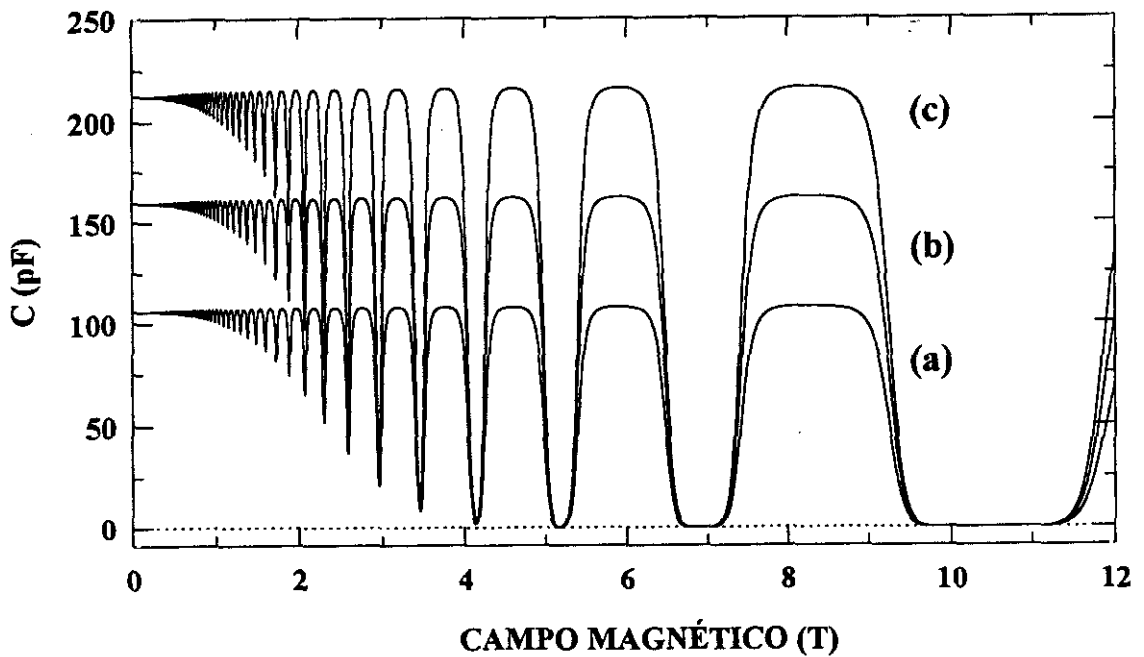


Figura 24: Comparación de la magnetocapacidad para un S2D con diferentes superficies de puerta.  $\varepsilon=1.088 \times 10^{-10}$ ,  $d_0=10^{-8} \text{ m}$ ,  $S=1.4 \times 10^7 \text{ m}^2$ , el resto de condiciones son las mismas que las correspondientes a la [Fig.21]. (a)  $S=10^7 \text{ m}^2$ , (b)  $S=1.5 \times 10^7 \text{ m}^2$ , (c)  $S=2 \times 10^7 \text{ m}^2$ .

Como conclusión de este apartado presentamos la simulación en las mismas condiciones de las curvas de la magnetocapacidad y la magnetorresistencia Hall. Se observa la coincidencia de las mesetas Hall con los mínimos de la magnetocapacidad debido a la dependencia de esta última con la densidad de estados.

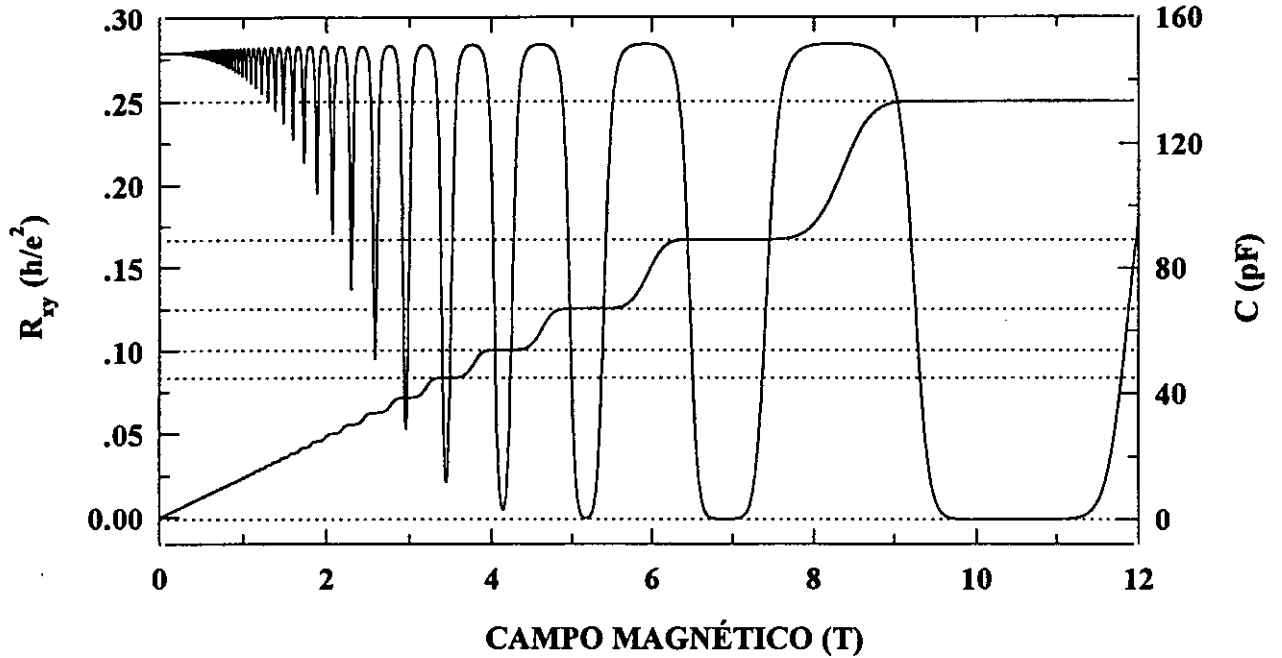


Figura 25: Comparación de la magnetocapacidad de un S2D con la correspondiente magnetorresistencia Hall.  $\epsilon=1.088 \times 10^{-10}$ ,  $d_0=10^{-8}m$ ,  $S=1.4 \times 10^{-7}m^2$ , el resto de condiciones son las mismas que las indicadas en la [Fig.21].



# V

## TÉCNICA EXPERIMENTAL

Para llevar a cabo medidas de magnetorresistencia, tanto Hall como diagonal, se necesita, además de bajas temperaturas y la posibilidad de variar en un amplio rango el campo magnético, una intensidad de corriente constante que permita, a partir de la medida de la caída de tensión en diferentes puntos de la muestra, la determinación precisa de cada una de las componentes de la magnetorresistencia transversa. En la [Fig.26] damos un esquema de todos los elementos necesarios, que pasaremos a describir a continuación.

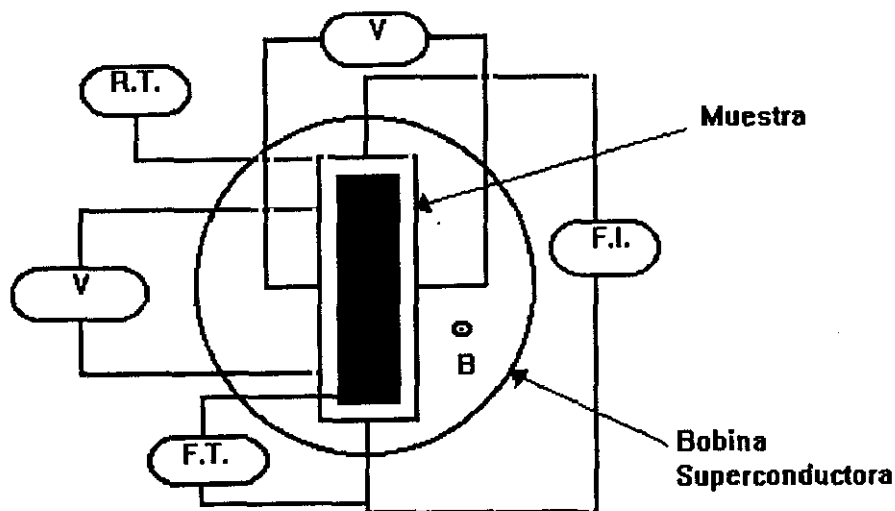


Figura 26: Montaje experimental utilizado en las medidas de EHC donde detallamos cada uno de los instrumentos necesarios (véase texto). R.T.: Regulador de temperatura, F.I.: Fuente de intensidad, V: Voltímetro, F.T.: Fuente de tensión.

# 1. DESCRIPCIÓN DE LA INSTRUMENTACIÓN

## 1.1. DESCRIPCIÓN DEL CRIOSTATO

En nuestras experiencias hemos utilizado un criostato comercial *OXFORD* compuesto de dos recintos intermedios que separan el contracriostato del exterior, [Fig.27], lugar donde se aloja el portamuestras. La misión de estos dos recintos es la de procurar un aislamiento térmico con el exterior lo más perfecto posible. Con este motivo, entre los dos se hace vacío con la ayuda de dos bombas, una rotatoria y otra turbomolecular. El recinto exterior se rellena y mantiene durante toda la experiencia con nitrógeno líquido y el interior con helio líquido. Este está, a su vez, conectado a través de una válvula de paso con el contracriostato, lo que permite enfriar rápidamente la muestra a 4.2K o incluso, como hemos hecho en numerosas ocasiones, a 1.2 K, la temperatura del helio líquido bombeado.

## 1.2. GENERACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

En la parte inferior del recinto interior del criostato va instalada una bobina superconductora que permite alcanzar campos magnéticos de hasta 11 Teslas, [Fig.27]. Está constituida por un conjunto de dos solenoides concéntricos, el exterior de una aleación de Nb/Ti que mantiene su resistencia eléctrica nula aun en presencia de altos campos magnéticos, y el interior de Nb<sub>3</sub>Sn, que posee un mayor valor de campo crítico aunque tiene el inconveniente de ser una aleación menos dúctil que la primera. Con el fin de conseguir la estabilización térmica, los hilos están provistos de un recubrimiento de cobre.

Una fuente de corriente estabilizada proporciona a la bobina la intensidad requerida para alcanzar un determinado valor del campo magnético, cuya relación característica es 0.124T/A. Así, por ejemplo, para obtener 12T es necesaria una intensidad de 96.76A. El voltaje en sus terminales es lo suficientemente grande para vencer la autoinducción del solenoide,  $L=26.13H$ . En paralelo con los dos extremos de la bobina superconductora se dispone de un filamento superconductor asociado a una resistencia de hasta 61mA, suficiente para provocar la transición del filamento al estado normal, actuando así a modo de interruptor.

La forma de proceder es la siguiente: Se introduce en los dos recintos del criostato nitrógeno líquido hasta conseguir que la bobina alcance una temperatura de 77K. Una vez alcanzado



La forma de proceder es la siguiente: Se introduce en los dos recintos del criostato nitrógeno líquido hasta conseguir que la bobina alcance una temperatura de 77K. Una vez alcanzado este punto, se extrae completamente el nitrógeno del recinto interior y comienza la operación más delicada, el llenado de este mismo recinto con helio líquido. Con esta operación conseguimos la transición superconductora de la bobina. La fase siguiente comienza con la inserción de la caña del criostato, donde se dispone la muestra con sus contactos hechos. Es entonces el momento de aplicar el campo magnético; calentando el filamento queda en estado normal y toda la potencia suministrada por la fuente se invierte en variar la intensidad que circula por el solenoide superconductor, permitiéndonos efectuar el barrido en campo magnético.

Sin embargo, para el estudio del EHC y SdH en tensión de puerta fijamos el valor del campo magnético. Así es, una vez alcanzada la intensidad necesaria, se deja enfriar el filamento cerrando, de este modo, el circuito superconductor.

En la figura siguiente se hace un esquema simplificado del sistema de generación de campo magnético y criogenia, en donde se detalla cada elemento.

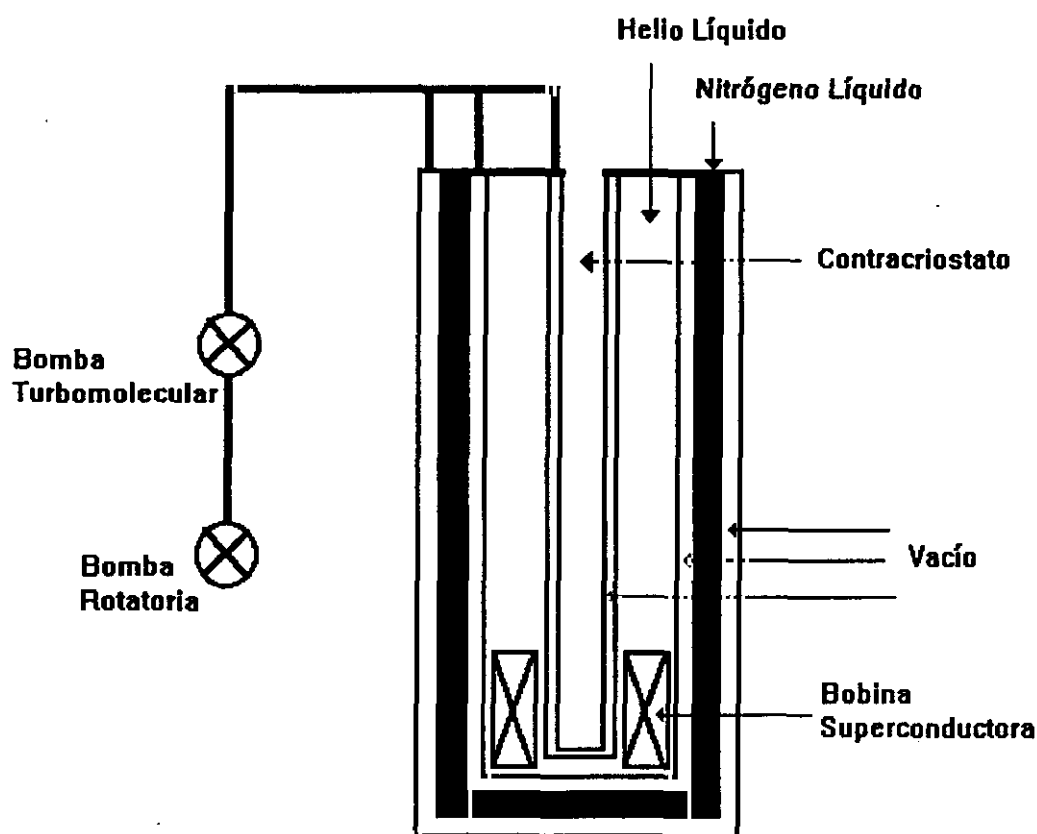


Figura 27: Esquema del sistema experimental de criogenia y de generación del campo magnético.

## 1.3. ELECTRÓNICA DE MEDIDA

### 1.3.1. FUENTE DE INTENSIDAD

Su función es la de fijar el valor de la corriente eléctrica que circula por el S2D. Para ello utilizamos una fuente continua de intensidad Keithley modelo 220, (véase la [Fig.26]), cuyo rango de intensidades está entre 1nA y 100mA, con una estabilidad del orden de  $10^{-3}\mu\text{A}$ . No obstante, con todas las heteroestructuras estudiadas hemos trabajado a una intensidad de  $10\mu\text{A}$ .

### 1.3.2. VOLTÍMETRO

Con el voltímetro medimos la caída de tensión que se produce entre los diferentes puntos de la muestra en los que se disponen los contactos (véase la [Fig.28]).

Nosotros hemos empleado un voltímetro Solartron 7081 con precisión de  $10^{-9}\text{V}$ , que en ninguna de nuestras muestras ha limitado la precisión en la medida de las mesetas de efecto Hall.

### 1.3.3. FUENTE DE TENSIÓN

Todas las muestras que estudiamos disponen de puerta, [Parte I]. Como ya hemos comentado, ésta nos ofrece una forma alternativa de analizar el EHC y las oscilaciones SdH ya que aplicando una tensión de puerta sobre la heteroestructura variamos la densidad de electrones del GE2D, lo que permite explorar la densidad de estados fijada a un determinado campo magnético a medida que provocamos un llenado o vaciado de los niveles de Landau.

Con idea de conseguir esta tensión de puerta utilizamos una fuente de tensión Keithley modelo 230 con IEEE que proporciona tensiones estables en un amplio intervalo entre 100mV y 100V, [Fig.26].

El rango en el que se puede variar la tensión está completamente determinado por el diseño particular de la heteroestructura, [Parte VI]. Así, por ejemplo, en nuestro caso disponíamos de un reducido margen entre -1.2V y 1V, aunque suficiente para observar los efectos cuánticos, [Susana,95], [Gilpérez,94], [Parte VI].

reducido margen entre -1.2V y 1V, aunque suficiente para observar los efectos cuánticos, [Susana,95], [Gilpérez,94], [Parte VI].

### 1.3.4. REGULACIÓN DE TEMPERATURA

La temperatura en todas las experiencias ha sido controlada con un regulador ITC4 de *OXFORD* con sistema manual de PID (proporcional, integral y derivado) de regulación. Se procede del siguiente modo: Programamos la temperatura a la que queremos llevar la muestra, una rampa de acceso a esta temperatura y un tiempo de estabilización en la misma. Para realizar la rampa en temperatura, el regulador dispone de un calentador que tomando como referencia la temperatura del helio líquido se encarga de arrastrar el sistema a la temperatura final y mantenerla durante el tiempo programado.

## 2. CONFIGURACIONES DE LOS CONTACTOS EN UNA MEDIDA DE EFECTO HALL Y MAGNETORRESISTENCIA DIAGONAL

Es importante precisar un poco el tipo de posibles configuraciones de los contactos en las medidas de magnetorresistencia diagonal y Hall. En la [Fig.28] hacemos un esquema de las más habituales.

El disco de Corbino, [Fig.28(a)], es la única geometría con la que puede obtenerse directamente la magnetoconductividad diagonal,  $\sigma_{xx}$ , aunque, resulta imposible medir la magnetoconductividad Hall. Sin embargo, la barra Hall, [Fig.28(b)], permite medir simultáneamente tanto la magnetorresistividad Hall,  $\rho_{xy}$ , como la diagonal,  $\rho_{xx}$ .

Salvo para la condición de EHC,  $\sigma_{xx}=0$ , la medida combinada de ambas magnetorresistividades no da en la inversión los valores correctos de las correspondientes magnetoconductividades, [Wakabayashi,78,1], [Wakabayashi,80,2], [Parte II]. Únicamente la barra Hall es la que proporciona los valores correctos de estas últimas en todo el rango del tensor de magnetoconductividad, [Wick,54].

Un tema abierto en la actualidad es el de las medidas *no locales* de la magnetorresistencia diagonal, que implica una disposición para los contactos de la forma que se indica en la [Fig.28(c)], [McEuen,90], [Tsukagoshi,91], [Takaoka,92,1].

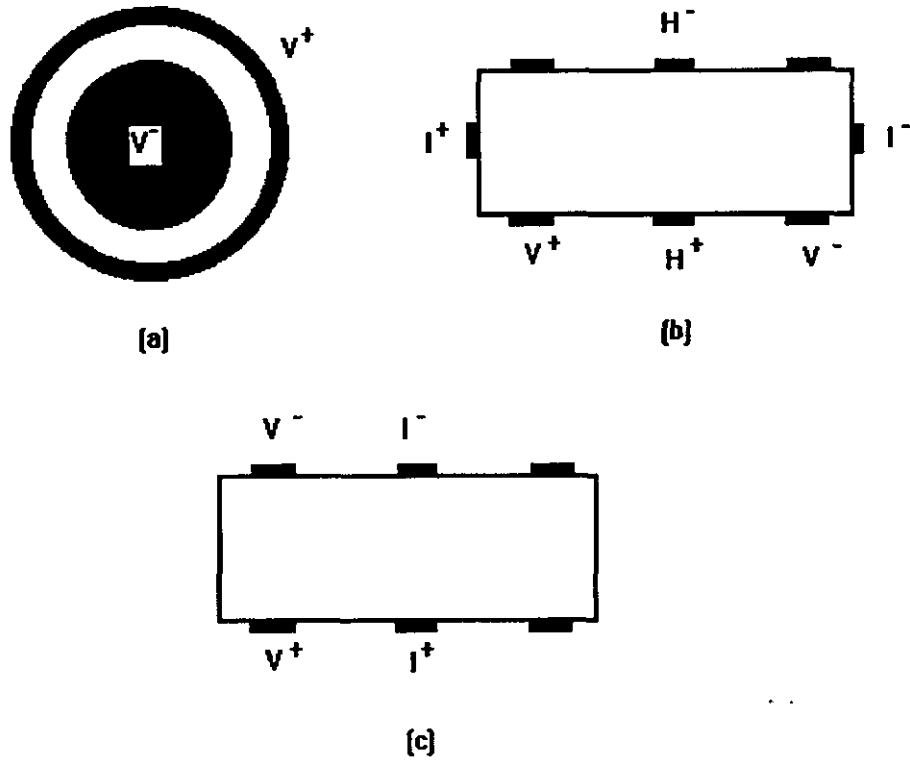


Figura 28: Posibles diseños de muestras para las experiencias de EHC y SdH (véase texto). (a) Disco de Corbino, (b) Barra Hall, (c) Barra Hall con disposición asimétrica de los contactos.  $I^+$  e  $I^-$  son los contactos para la intensidad,  $V^+$  y  $V^-$  para el voltaje y  $H^+$  y  $H^-$  para el voltaje Hall

# VI

## DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Esta parte la dedicaremos a la presentación de los resultados experimentales de magnetorresistencia diagonal ( $R_{xx}$ ) y Hall ( $R_{xy}$ ), obtenidos íntegramente en nuestro laboratorio. Estas medidas han podido llevarse a cabo gracias a las muestras que nos proporcionó el Departamento de Ingeniería Electrónica de la E.T.S.I. de Telecomunicación de la Universidad Politécnica de Madrid.

### 1. CARACTERÍSTICAS DE LAS MUESTRAS MEDIDAS

Las muestras son pozos cuánticos de heteroestructuras semiconductoras de  $In_xGa_{1-x}As$ , con dopaje de tipo  $\delta$ , [Parte I], y geometría en forma de barra Hall, [Apartado 3] de la [Parte V], [Gilpérez,94], [Susana,95].

Hemos dispuesto de tres series, todas ellas con puerta, y que se diferenciaban en la concentración de indio ( $x$ ). Destacaremos cada una de ellas simplemente con los números 1 ( $x=0.15$ ), 2 ( $x=0.15$ ) y 3 ( $x=0.2$ ).

En la [Fig.29] se presenta un esquema del diagrama de bandas y la composición de nuestras heteroestructuras en la dirección  $z$ , la de aplicación del campo magnético.

Por otro lado, en la tabla I se detallan las características básicas completas de cada una de ellas. En la primera columna se indica la tensión de puerta aplicada sobre la heteroestructura, de manera que con tensiones negativas (positivas) se reduce (aumenta) la densidad de electrones del GE2D.

MUESTRA	$V_g$ (V)	T (K)	$R_0$ ( $\Omega$ )	$n_c$ ( $10^{16} \text{m}^{-2}$ )	$\mu$ ( $\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ )
1	-0.3	1.2	903	1.045	23150
1	0	4.2	588	1.525	24400
1	+0.15	1.2	586	1.635	22800
2	0	1.2	2207	0.735	13500
3	0	1.2	539	1.728	23100
3	+0.5	1.2	477	1.915	23400
3	+0.8	1.2	488	1.98	23300

Tabla I: Características básicas de las muestras analizadas y condiciones en las que se han medido. Las muestras 1 y 2 son pozos cuánticos de  $\text{Al}_{0.24}\text{Ga}_{0.76}\text{As}/\text{In}_{0.15}\text{Ga}_{0.85}\text{As}$ , mientras que la 3 corresponde a uno de  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}/\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{As}$ .

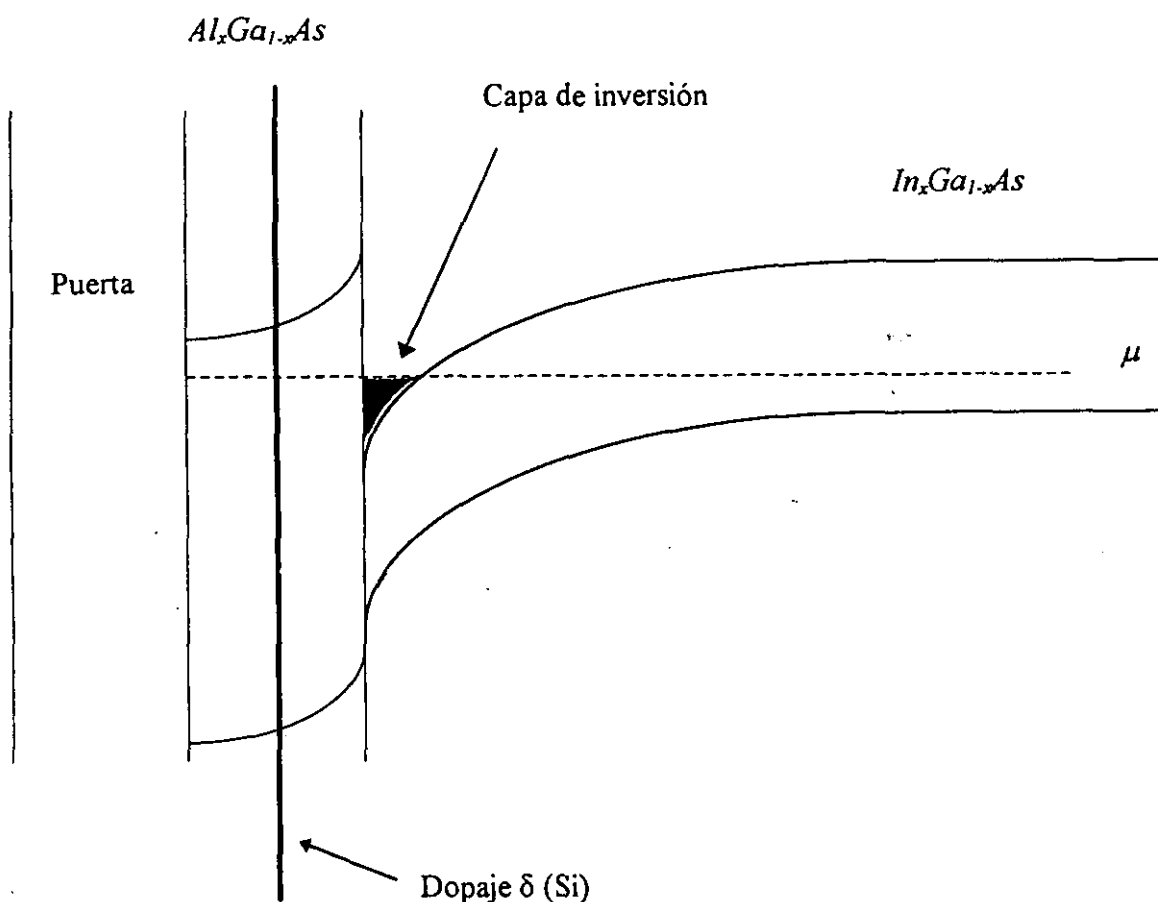


Figura 29: Esquema global de la estructura de bandas y composición de las heteroestructuras medidas. La localización del dopaje  $\delta$  se indica sobre el propio dibujo.

Para obtener la masa efectiva, habitualmente, se efectúan medidas de resonancia ciclotrón, [Liu,88]. No obstante, la bibliografía sobre el tema no es excesivamente abundante en relación a pozos

cuánticos, aunque sí respecto al material semiconductor en volumen. Se ha intentado un método alternativo, aunque aproximado e indirecto, que consiste en cuantificar la variación de la amplitud de las oscilaciones en la magnetorresistencia diagonal en función de la temperatura, [Lo,91,1]. Sin embargo, en último término esto exige disponer de un modelo con el que poder tratar el comportamiento de esta amplitud con  $T$ .

Para el material en volumen correspondiente a nuestros pozos cuánticos, la masa efectiva en el semiconductor en volumen está dada por la ecuación

$$m^* = (0.067 - 0.044x)m_0 \quad [\text{VI.1}]$$

donde  $x$  representa, como antes, la concentración de Indio.

En su determinación teórica, se han hecho algunos intentos partiendo de la aproximación triangular, [Ando,82,1], [Ando,82,2], [Parte I], que incluye la dependencia de la masa efectiva con la no parabolicidad de la banda de conducción. Su resultado fundamental puede resumirse en la expresión siguiente para la masa efectiva al nivel de Fermi

$$m^* = \left( 1 + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)E_0 + 4E_F}{E_g} \right)^{\frac{1}{2}} m_0$$

siendo  $E_g$  el *gap* del  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  en volumen,  $E_0$  la energía de la subbanda y  $E_F$  el nivel de Fermi.

Sin embargo, con los ajustes efectuados a bajo campo a través de nuestro modelo teórico, hemos comprobado que las masas efectivas del GE2D se ajustan muy bien a sus valores en volumen, obtenidos a partir de la [Ec.1], y no ha sido necesario considerar efectos de no parabolicidad de la banda. Así, encontramos que las masas efectivas para las muestras 1 y 2 poseen un valor de  $0.0604m_0$  y para la 3 de  $0.0582$ .

## 2. MAGNETORRESISTENCIAS $R_{xx}$ Y $R_{xy}$ EN FUNCIÓN DE B

Las medidas experimentales básicas han sido la determinación de la magnetorresistencia Hall,  $R_{xy}$ , y la diagonal,  $R_{xx}$ , ambas en función del campo magnético. En las tres figuras siguientes mostramos resultados típicos correspondientes a las muestras: 1( $V_g=+0.15\text{V}$ ), 1( $V_g=-0.3\text{V}$ ) y 2( $V_g=0\text{V}$ ). Estas tres medidas se han efectuado en las mismas condiciones de 1.2K de temperatura y  $10\mu\text{A}$  de intensidad de corriente. Podemos comprobar en la [Tabla I] que la [Fig.30(a)] corresponde a la muestra con mayor densidad electrónica, 1( $V_g=+0.15\text{V}$ ); y la [Fig.30(c)] a la de menor densidad electrónica, 2( $V_g=0\text{V}$ ). El valor en la muestra 1( $V_g=-0.3\text{V}$ ) es intermedio, [Fig.30(b)];.

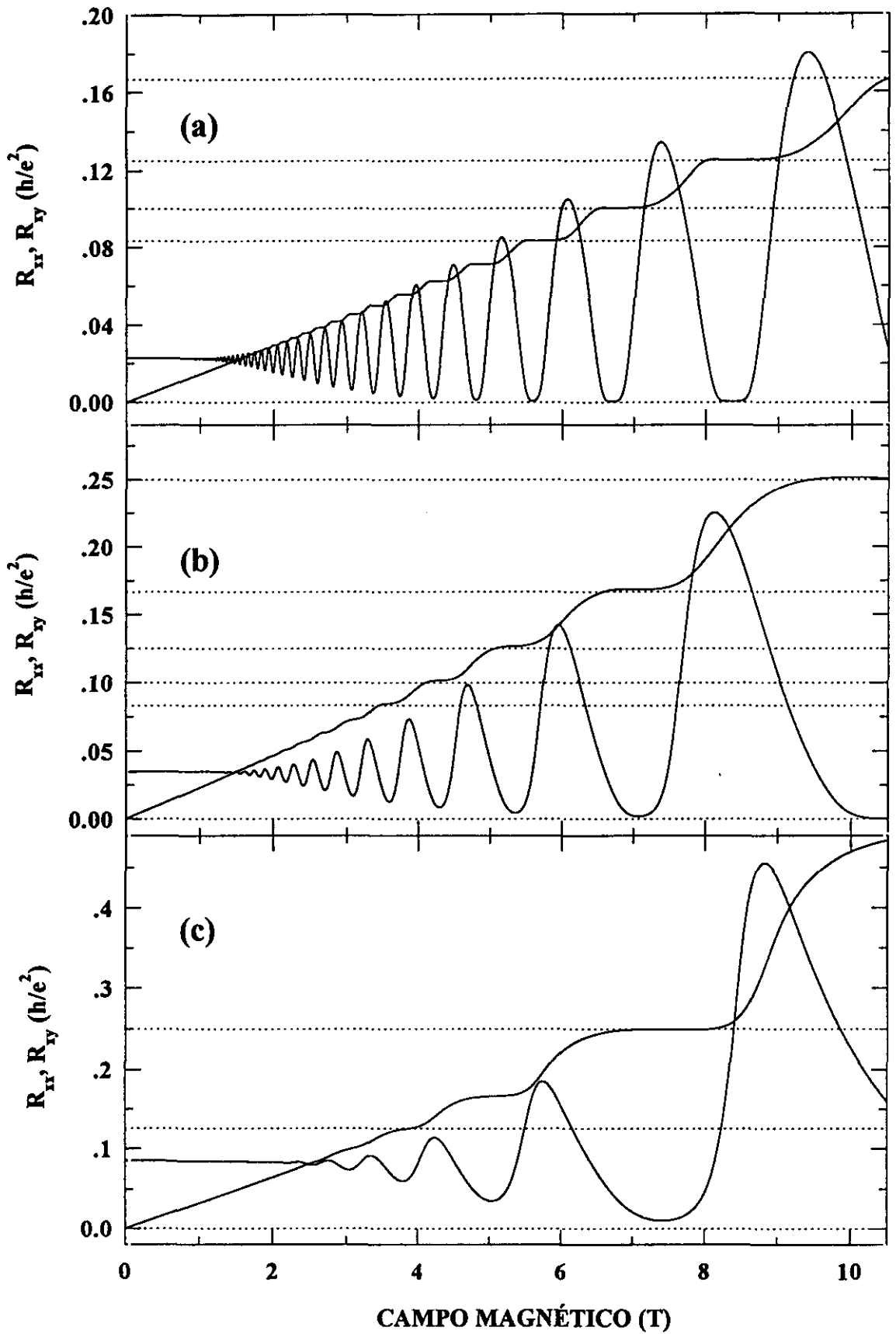


Figura 30: Medidas de magnetorresistencia Hall y SdH en función del campo magnético correspondientes a muestras con diferente concentración de electrones. (a)  $n_0=1.635 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ , (b)  $n_0=1.045 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$  (c)  $735 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$



En la figura anterior podemos observar la aparición de las mesetas Hall características del EHCE a valores enteros de  $1/n$  de la unidad fundamental de resistencia, la constante de Klitzing  $R_K = h/e^2$ . Como ya comentábamos en la [Parte IV] en relación a la ausencia de ruptura de la degeneración de espín de cada nivel de Landau en sistemas electrónicos de movilidad baja y media (véase la [Tabla I]), en nuestros experimentos, aparecen únicamente los valores correspondientes a  $n$  pares.

Por otro lado, representando conjuntamente ambas magnetorresistencias, destaca la coincidencia entre las mesetas Hall y los mínimos, eventualmente ceros, de la magnetorresistencia diagonal,  $R_{xx}$ .

### 3. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE PORTADORES

Una vez obtenidas las curvas experimentales de ambas magnetorresistencias en función del campo magnético, la primera información que puede extraerse es la densidad de electrones del GE2D. Hay dos formas diferentes: a partir de la pendiente Hall a bajo campo magnético, o a través del análisis de Fourier de las oscilaciones de la magnetorresistencia diagonal.

Analicemos cada uno de estos métodos.

#### 3.1. PENDIENTE HALL

La pendiente Hall a bajo campo magnético permite obtener la densidad de electrones total a través de su expresión semiclásica

$$R_H = \frac{1}{en_e}$$

siendo  $n_e$  la densidad total de electrones en el GE2D y  $R_H$  la pendiente Hall.

#### 3.2. TRANSFORMADA DE FOURIER

Siempre que tengamos una señal periódica es posible efectuar un análisis de Fourier que nos proporcione la frecuencia fundamental. Como vimos en la [Parte III] y en la [Parte IV], la densidad de estados y, en consecuencia, todas las magnitudes físicas presentan periodicidad en  $1/B$ . En nuestro caso,

analizando la frecuencia correspondiente a las oscilaciones de la magnetorresistencia diagonal, hemos obtenido la densidad de electrones del GE2D, como describimos a continuación.

Recordando la expresión general de los niveles de Landau, para un nivel de Fermi fijo en su valor a campo magnético nulo, tenemos

$$\frac{E_F}{\hbar\omega_c} = \frac{n_e h}{2eB} = n + \frac{1}{2}$$

donde  $n$  es el índice del correspondiente nivel de Landau.

Teniendo en consideración que el nivel de Fermi permanece fijo, [Parte IV], la separación entre dos niveles de Landau consecutivos en función del campo magnético estará dado por la ecuación

$$\frac{n_e h}{2e} \left( \frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right) = 1$$

de donde deducimos la siguiente relación para la densidad de electrones

$$n_e = \frac{2e}{h} \left( \frac{B_1 B_2}{B_1 - B_2} \right) = \frac{2e}{h} F$$

siendo  $F$  la frecuencia propia de las oscilaciones.

Para efectuar el análisis de Fourier y obtener  $F$  de las curvas de magnetorresistencia hemos utilizado el programa comercial *Tablecurve*. Una vez obtenida, es inmediato calcular la densidad de electrones a través de la ecuación anterior.

#### 4. $R_{xx}$ Y $R_{xy}$ EN FUNCIÓN DE $V_g$ A VARIOS $B$

El efecto de variar la tensión en un dispositivo *HEMT* con puerta o en un *MOSFET* es variar la densidad de electrones del GE2D, lo que nos ofrece un enfoque diferente para abordar el EHC y el SdH.

En la [Fig.31] presentamos los resultados obtenidos sobre la muestra 1 a varios campos magnéticos,  $B=6.3, 7.9$  y  $10.5T$ . En la curva de magnetorresistencia diagonal se definen cada vez mejor las oscilaciones correspondientes a cada nivel de Landau a medida que aumentamos el campo aplicado. De forma simultánea, en el efecto Hall las mesetas Hall aparecen con más claridad.

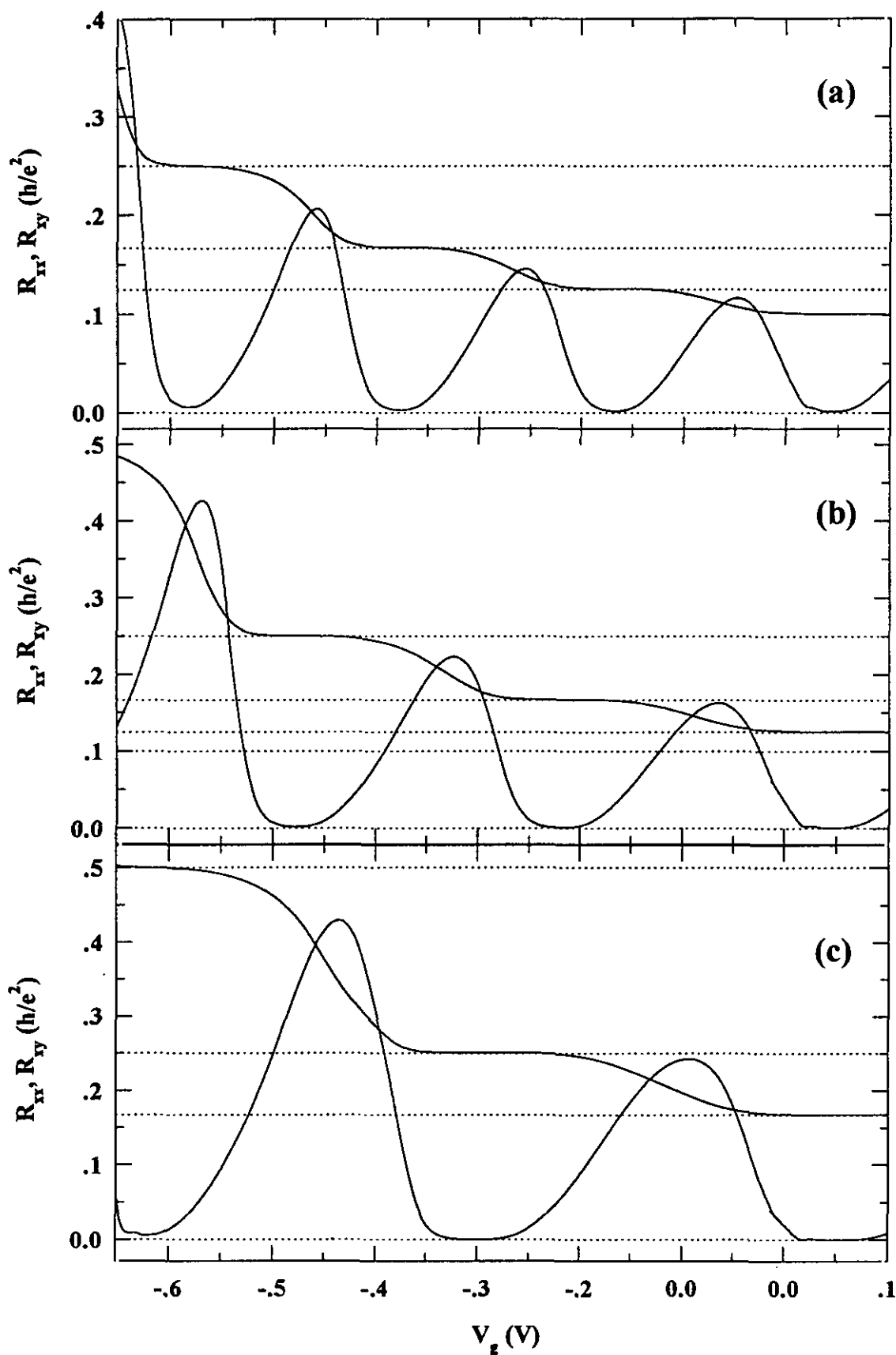


Figura 31: Medidas de magnetorresistencia Hall y SdH en función de la tensión de puerta para diferentes campos magnéticos. (a)  $6.3 T$ , (b)  $7.9 T$ , (c)  $10.5 T$

## 5. $R_{xx}$ Y $R_{xy}$ EN FUNCIÓN DE $V_g$ A VARIAS TEMPERATURAS

Uno de los puntos más controvertidos desde la aparición del EHC ha sido el del papel que juegan los estados localizados y extendidos de cada nivel de Landau. La forma experimental más directa de discriminar entre un tipo y otro es a partir de la diferencia de comportamiento de cada uno de ellos con la temperatura.

En la [Fig.32] resumimos nuestras medidas para ambas magnetorresistencias en función de la tensión de puerta a las temperaturas  $T=1.2, 4.2, 6.1, 10.6$  y  $15K$ . De estas curvas es importante destacar el desplazamiento hacia la izquierda que experimentan los máximos de las oscilaciones SdH a medida que aumentamos la temperatura. Sus implicaciones físicas las discutiremos en la [Parte VII].

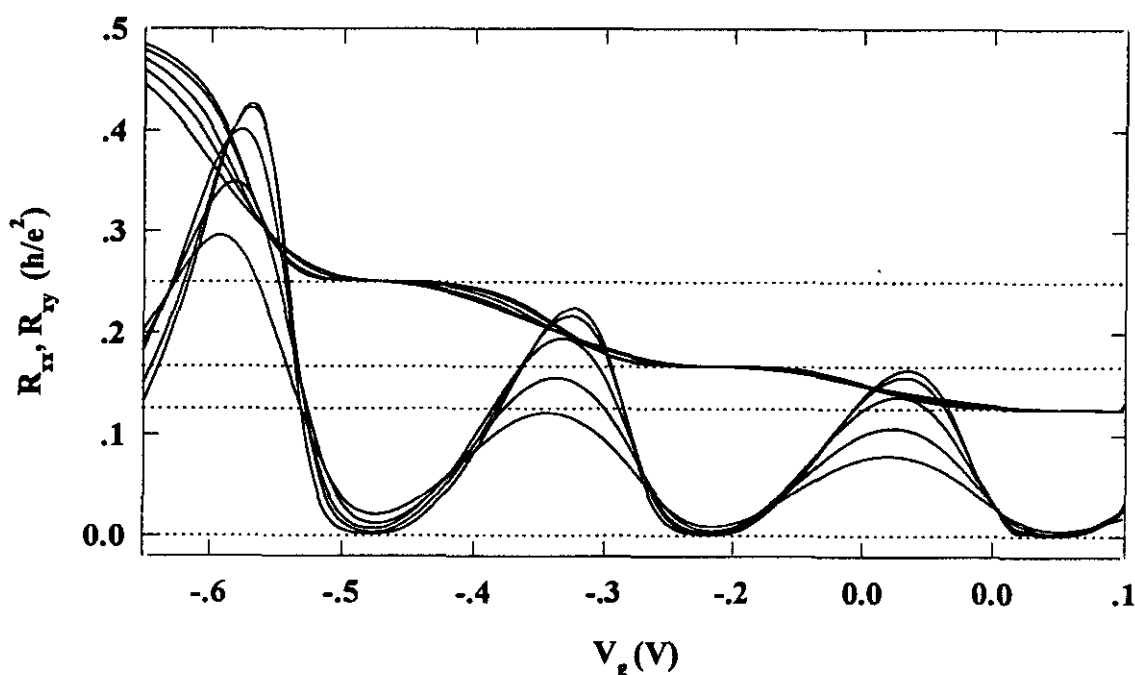


Figura 32: Medidas de magnetorresistencia Hall y SdH en función de la tensión de puerta a varias temperaturas:  $T=1.2K, 4.2K, 6.1K, 10.6K, 15K$ .

## 6. $R_{xx}$ Y $R_{xy}$ EN FUNCIÓN DE $B$ A VARIAS TEMPERATURAS

La [Fig.33(a)] representa el comportamiento de la magnetorresistencia diagonal a diferentes temperaturas, en la que nuevamente se pone de manifiesto el progresivo desplazamiento con la misma de los máximos de las oscilaciones, en este caso hacia campos elevados. En la [Fig.33(b)] aparece un detalle de la desaparición de las mesetas Hall a medida que aumenta la temperatura.

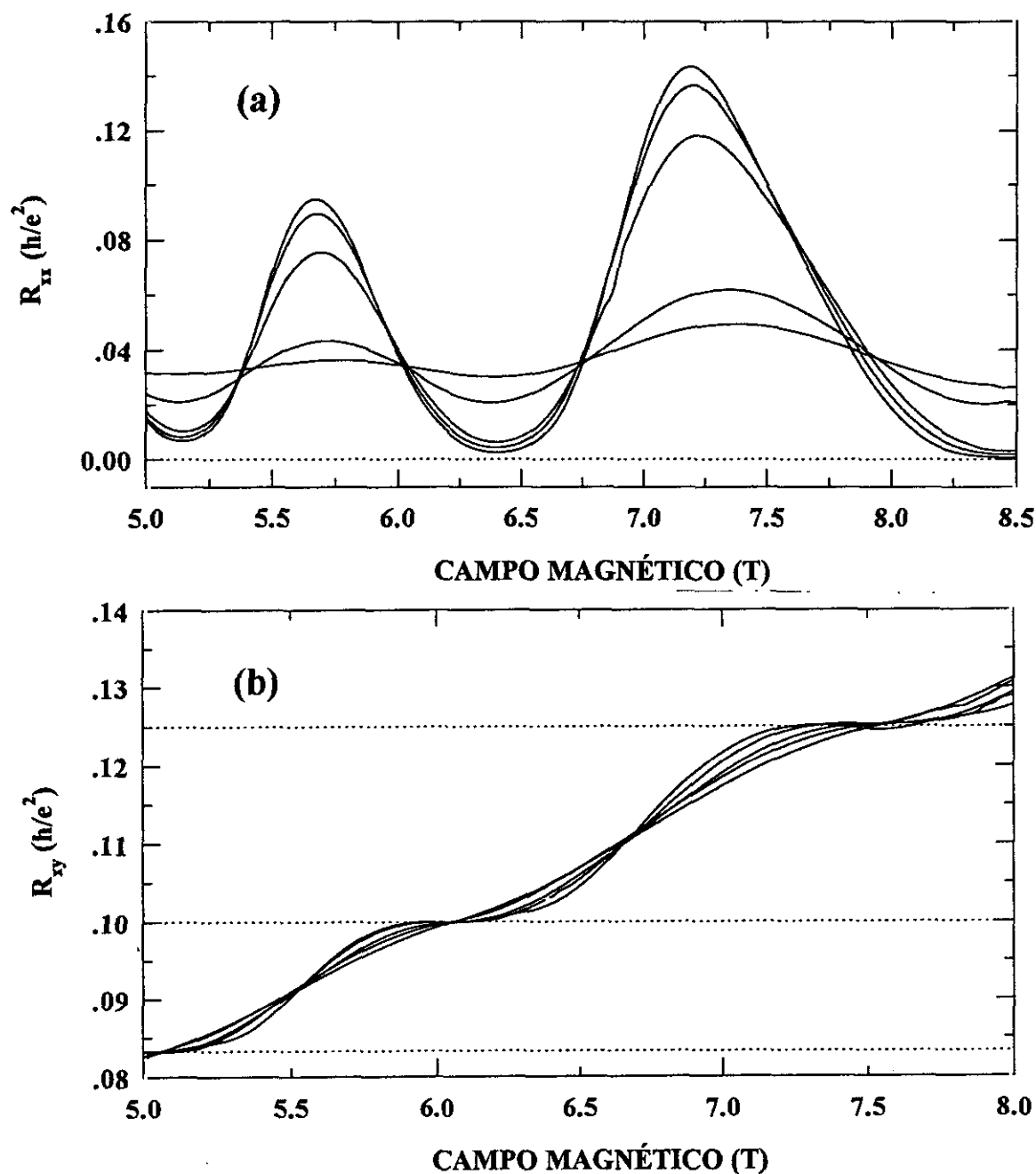


Figura 33: Medidas de magnetorresistencia Hall y SdH en función del campo magnético a las temperaturas  $T=1.2K$ ,  $4.2K$ ,  $7K$ ,  $20K$  y  $28K$  (a) $R_{xx}$ , (b) $R_{xy}$ .



# VII

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON EL MODELO TEÓRICO

Esta Parte, junto con la [Parte IV], constituye la parte fundamental de la memoria. Por un lado, destacaremos las características fundamentales de los diferentes experimentos que hemos realizado sobre el EHCE, y que esbozamos en la [Parte VI]; por otro, compararemos los resultados experimentales con los generados por nuestro modelo teórico, lo que nos permitirá extraer consecuencias importantes en relación al fenómeno y encontrar los límites del modelo.

Antes de comenzar con el análisis de los datos experimentales abordaremos el problema del transporte en las regiones de campo magnético que corresponden a una meseta Hall.

Para efectuar las medidas de EHCE es necesario, como ya comentábamos en la [Parte V], disponer de una fuente continua de intensidad que permita fijar el valor de la intensidad de corriente que circula por la muestra,  $I_x$ , durante todo el experimento. De modo que la ley de Ohm puede expresarse por la conocida relación

$$V_x = I_x R_{xx} = I_x \rho_{xx} \frac{l}{a} \quad [\text{VII.1}]$$

siendo el término  $l/a$  el factor geométrico de la muestra, [Fig.4]. Supongamos ahora un GE2D de alta movilidad. Si nos centramos en una región de campo magnético para el que la magnetorresistencia diagonal llega a hacerse cero esto implica, como se deduce de la [Ec.1], que la caída de tensión entre los contactos situados a lo largo de la dimensión  $x$  se hace idénticamente cero.

Recordando la [Ec.II.7], vemos que el comportamiento de la magnetorresistencia diagonal es el mismo que la correspondiente magnetoconductividad. Así, si hacemos uso de estas condiciones en la [Ec.II.5], nos queda

$$\begin{aligned} J_x &= -\sigma_{xy} E_y' \\ J_y &= 0 \end{aligned} \quad [\text{VII.2}]$$

Busquemos las consecuencias que se pueden deducir de estas nuevas relaciones. El calor de Joule que se desprende en el cristal al paso de la corriente está dado por, [Dávidov,81]:

$$Q = \vec{J} \vec{E}' \quad [\text{VII.3}]$$

que depende únicamente de la resistividad del cristal sin campo magnético. Efectivamente, sustituyendo las ecuaciones generales para la densidad de corriente en función de las componentes del campo eléctrico y debido a la relación de Onsager [Ec.II.3], [Callen,81], podemos expresar esta energía disipada como

$$Q = \sigma_{xx} (E_x'^2 + E_y'^2) = \sigma_{xx} |\vec{E}'|^2 \quad [\text{VII.4}]$$

En el caso que nos interesa, al atravesar una meseta Hall, vemos que  $|\vec{E}'|^2 = E_y'^2$  y además,  $\sigma_{xx} = 0$ , de donde es inmediato deducir la relación

$$Q = 0 \quad [\text{VII.5}]$$

es decir, que no se produce disipación de energía en el S2D, lo que parece indicar un efecto superconductor en el GE2D. Este es uno de los fenómenos asociados al EHC que más han llamado la atención desde su aparición, [Klitzing,86,4], [Riess,93].

Nosotros vamos a dar una interpretación algo diferente, basada en un análisis directo de la [Ec.2]. Hay que tener muy presente que durante toda experiencia de EHC la intensidad de corriente mantiene en todo momento su valor fijado inicialmente. En la [Parte II], vimos que la consecuencia fundamental de la presencia del campo magnético sobre las propiedades de transporte se resume en la aparición de una velocidad de deriva. Particularizando para la región de la meseta Hall, tenemos

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E}' \times \vec{B}}{B^2} = \frac{E_y'}{B} \vec{u}_x$$

donde  $\vec{u}_x$  es el vector unitario en la dirección  $x$  del sistema. De forma que la expresión para el módulo vendrá dada por la ecuación

$$|\vec{v}_D| = \frac{E_y'}{B}$$



Llevando este resultado a la [Ec.3] y operando, la energía disipada en el sistema es nula, es decir, no hay variación neta de energía en el S2D. Sin embargo, del hecho de que la magnetoconductividad diagonal tienda a cero no significa que no pueda pasar corriente. La idea implícita en la [Ec.II.5] es la siguiente: Una fuerza electromotriz en la dirección  $x$  está asociada con una corriente Hall en la dirección  $y$ . A su vez, la fuerza electromotriz necesaria para anular esta corriente da lugar a una corriente Hall en la dirección  $x$ , que es precisamente la densidad de corriente que se observa al atravesar una meseta, según se deduce directamente de la [Ec.2].

En estas condiciones podemos concluir que el trabajo sobre los electrones lo efectúa el potencial Hall. Luego, no hay ningún efecto superconductor sino que el acoplamiento entre las dos componentes de la densidad de corriente y los campos eléctricos de transporte hace que la tensión Hall actúe como fuente de intensidad al atravesar una meseta.

Por otro lado, cuando un nivel de Landau pasa por el nivel de Fermi, se produce una disipación de energía en el S2D. Así es, en este caso la velocidad de deriva a un campo magnético dado tiene la expresión

$$\vec{v}_D = \frac{E'_y}{B} \vec{u}_x + \frac{E'_x}{B} \vec{u}_y$$

con componentes  $x$  e  $y$ . Entonces, utilizando nuevamente el teorema de Poynting, nos quedaría la ecuación

$$-\frac{dW}{dt} = \sigma_x E'^2 S = \rho_0 |\vec{J}|^2 S$$

donde  $S$  representa el área del S2D. En este caso tenemos efecto Joule, por lo que para mantener la densidad de corriente necesitamos una fuente externa que realice trabajo sobre los electrones.

Comenzaremos lo que es propiamente esta Parte de comparación de nuestros datos experimentales con el modelo con el análisis detallado de las curvas que presentamos en la [Parte VI]. De la [Fig.30], donde mostramos la magnetorresistencia de tres muestras con diferente número de portadores en función del campo magnético, tenemos que destacar la asimetría de las oscilaciones a campo alto. Comparando a simple vista estas figuras y teniendo en consideración sus respectivas densidades de electrones, puede pensarse que la cola de cada oscilación SdH es más prolongada a medida que disminuye la densidad. Sin embargo, lo que es significativo es contrastar oscilaciones correspondientes al mismo índice de Landau. En la figura que viene a continuación representamos la oscilación para el índice de Landau  $n=1$  de las muestras 1 ( $V_g=-0.3V$ ) y 2 de la [Fig.30]. Como

vemos, a pesar de las diferentes características de ambas muestras, (Tabla I), la asimetría de la oscilación es similar.

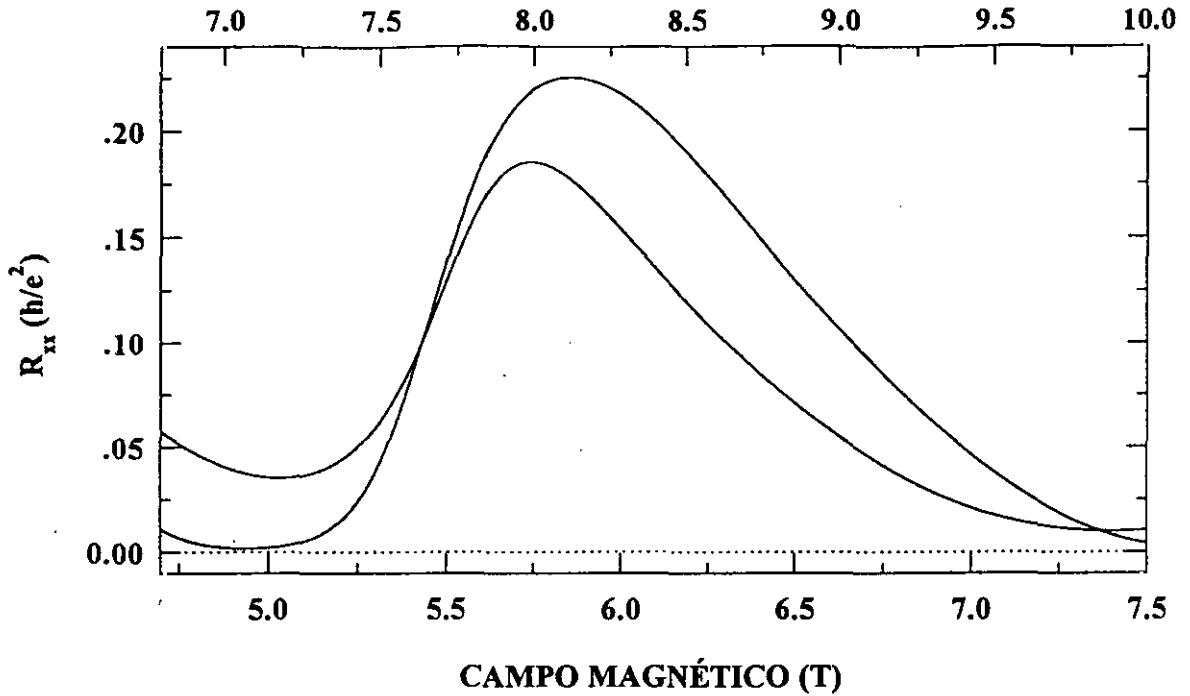


Figura 34: Oscilación correspondiente al nivel de Landau de índice  $n=1$  para las muestras 1 ( $V_g = -0.3V$ ) y 2 (Tabla I).

La primera intención que podemos tener es asociar esta asimetría a la forma de la densidad de estados, en particular, en el comportamiento del ancho de los niveles de Landau,  $\Gamma$ , con el campo magnético. Sin embargo, si realizamos medidas de magnetorresistencia diagonal ( $R_{xx}$ ) en función de la intensidad de corriente que pasa por la muestra, [Haug,87,2], [Nachtwei,93,1], [Nachtwei,94,2], [Fig.35], o en las geometrías Corbino, de magnetoconductividad diagonal ( $\sigma_{xx}$ ) en función de la tensión aplicada, ([Apartado 2] de la [Parte 5]), [Haug,87,2], observamos un comportamiento que excluye la posibilidad de relacionar de forma directa la asimetría de las oscilaciones con la correspondiente a los niveles de Landau.

Al contrario de lo que ocurría con la componente Hall de la magnetoconductividad, que dependía únicamente a alto campo magnético de la forma de la densidad de estados, tanto la magnetoconductividad diagonal como ambas magnetorresistencias dependen de la forma de cada nivel de Landau pero también del tiempo de vida del electrón en un determinado estado energético, tiempo de vida que está relacionado directamente con el carácter localizado o extendido de los estados. Este es entonces el único parámetro que puede explicar curvas como la que presentamos en la [Fig.35] tomada de la bibliografía.

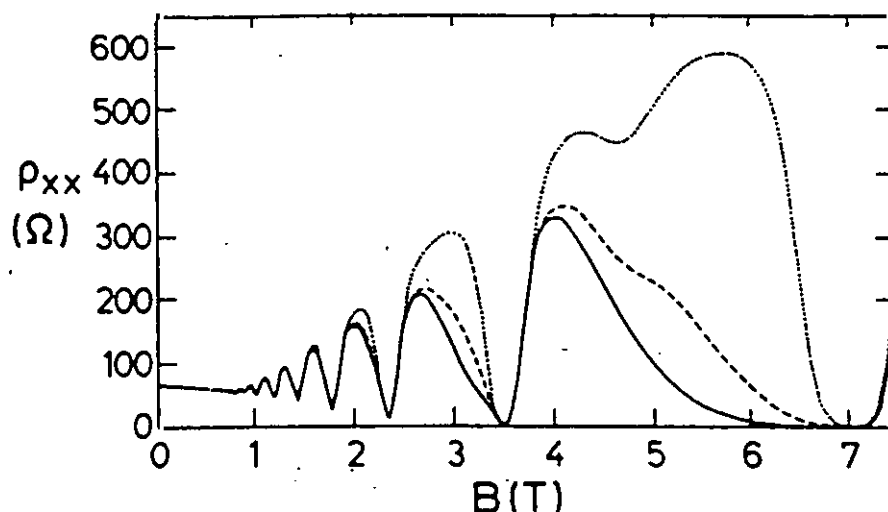


Figura 35: Medidas de  $R_{xx}$  en función de la intensidad de corriente que pasa por la muestra, [Haug,87,2]. La línea continua corresponde a  $I=10^{-7}A$ , la de trazos a  $I=10^{-6}A$  y la punteada a  $I=10^{-5}A$ .

En la figura anterior observamos que la región más asimétrica de cada oscilación es la más afectada por el aumento de intensidad o de voltaje aplicado, [Haug,87,2], lo que es una manifestación del carácter localizado de los estados en esa zona.

La discriminación entre estados localizados y extendidos es uno de los puntos más controvertidos del EHC y SdH, [Laughlin,81,1], [Smrcka,86,2], [Isihara,86,3], [Pruisken,87,1], [Raikh,93,1]. Acabamos de comprobar que los estados de las colas de cada nivel corresponden a estados localizados. Una forma alternativa de llegar a esta misma conclusión es a través del análisis de los efectos térmicos. La temperatura, al ser un concepto estadístico no se refleja en la densidad de estados, sin embargo, sí afecta al tiempo de vida del electrón en un estado determinado. En la [Fig.32] y la [Fig.33] describimos un comportamiento típico de ambas magnetorresistencias en función de la tensión de puerta y del campo magnético a varias temperaturas. Hay que destacar el desplazamiento sistemático de la amplitud de cada oscilación en la magnetorresistencia diagonal, [Lo,91,1]. Recordemos el carácter activado de los estados localizados, que hace que un aumento de temperatura lleve consigo una disminución del tiempo de vida del electrón en uno de estos estados, [Parte IV]. Por otro lado, los estados extendidos de cada nivel de Landau se ven afectados por la temperatura a través del término  $A_{T,p}$ , [Parte IV], que tiene en cuenta la desaparición de los efectos cuánticos, las órbitas ciclotrón, debido a  $T$ .

Así, el efecto de desplazamiento de los máximos de las oscilaciones SdH con  $T$  es consecuencia de la diferencia de comportamiento de los estados localizados y extendidos con la temperatura: Al aumentar esta las órbitas ciclotrón comienzan a desaparecer, lo que lleva consigo una disminución de la amplitud de las oscilaciones reflejada en el término  $A_{T,p}$ . Sin embargo, los estados localizados reducen su tiempo de vida y, en consecuencia, aumenta su contribución a la magnetoconductividad diagonal.

Antes de analizar las curvas de ambas magnetorresistencias en tensión de puerta conviene tener presente la dependencia de la densidad de electrones del GE2D con la misma, que es función de las características particulares de la heteroestructura como la concentración de dopantes, la distancia entre el S2D y la localización del dopaje, el tipo de pozo cuántico, triangular o cuadrado, etc. La forma de conocer esta dependencia para una muestra determinada es a través de su pendiente Hall a campo bajo para diferentes tensiones de puerta aplicadas sobre el S2D, (véase el [Apartado 3.1] de la [Parte VI]). Así, en general encontramos una relación del tipo

$$n = f(V_g)$$

siendo  $f(V_g)$  en principio, una función arbitraria del potencial de puerta aplicado. En la [Fig.36] está representada esta dependencia para muestra la 3.

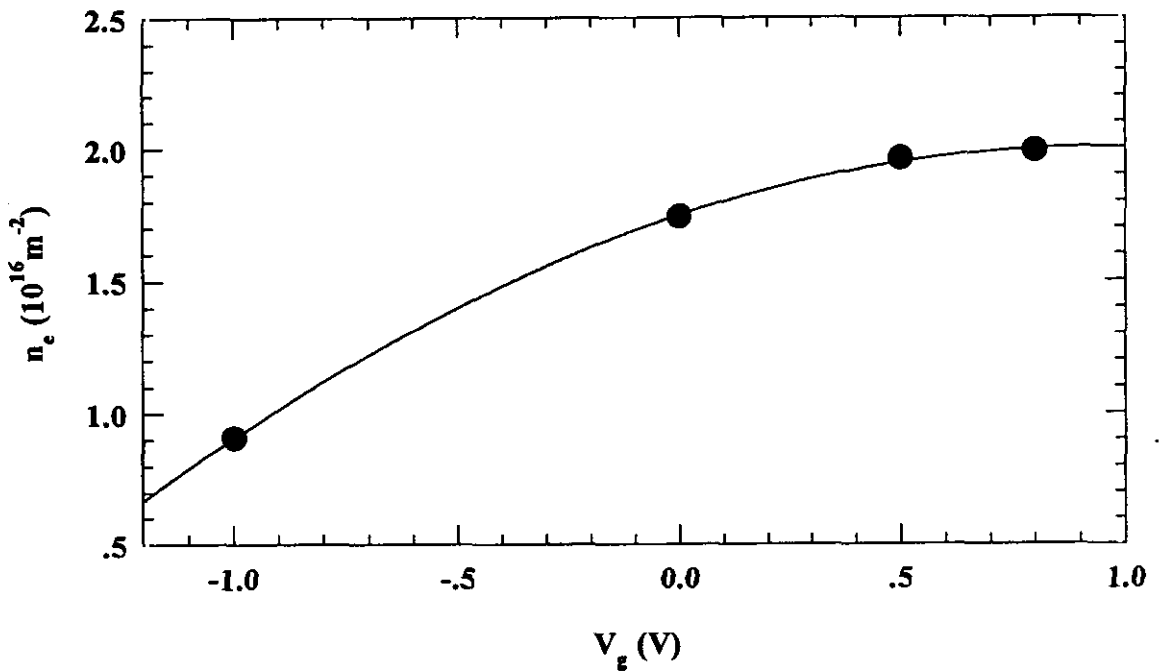


Figura 36: Dependencia de la densidad de electrones con la tensión de puerta de un pozo cuántico de  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}/\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{As}$  a bajo campo magnético (la línea es una guía para los ojos).

En la región de comportamiento cuántico, la consecuencia más inmediata sobre la magnetorresistencia diagonal de esta dependencia no lineal del llenado con la tensión de puerta se refleja en el ancho de las oscilaciones. La correspondiente a la muestra descrita en la figura anterior se presenta en la [Fig.37]. Así, a medida que aumentamos la tensión de puerta el ritmo de llenado es más lento, lo que obliga a incrementar más la tensión para conseguir el llenado de cada nivel de Landau. Esto exige tener cierta precaución al interpretar físicamente las curvas en tensión de puerta, puesto que puede aparecer este ensanchamiento espurio de las oscilaciones de la magnetorresistencia diagonal que, como vemos, no debe asociarse a la interacción de los electrones del GE2D con las impurezas ionizadas, [Parte III].

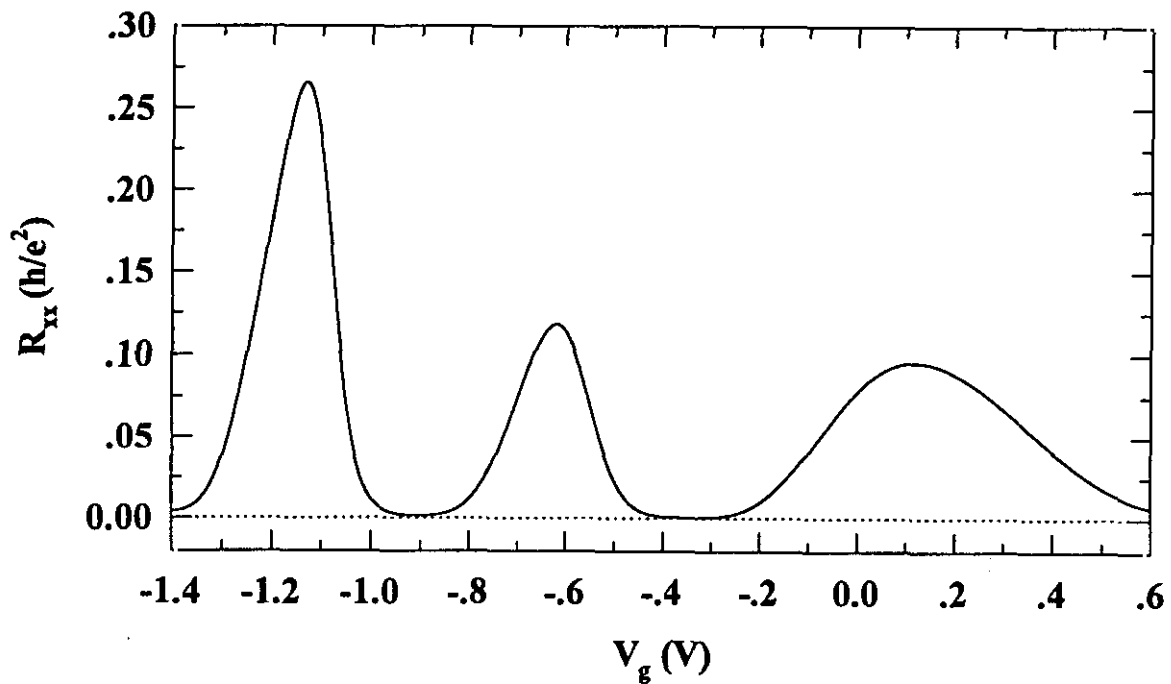


Figura 37: Magnetorresistencia diagonal para la muestra 3 con un campo magnético aplicado de 10T.

De la comparación de las tres curvas de la [Fig.31] para el comportamiento con la tensión de puerta a diferentes campos magnéticos de la muestra 1, queremos destacar la clara dependencia del ancho de las oscilaciones con el campo magnético. Para esta muestra comprobamos que existe una dependencia lineal del llenado con la tensión de puerta, y no se plantea el problema que acabamos de describir.

Si nos fijamos en la oscilación correspondiente a un mismo índice de Landau para las tres curvas de magnetorresistencia diagonal a los distintos campos, observamos que el ancho de la oscilación aumenta con el mismo. Este comportamiento está relacionado con una dependencia de la efectividad del potencial electrostático debido a las impurezas ionizadas con el campo magnético.

En la [Parte III] concluimos que el efecto del campo magnético se resume en el radio de Larmor generalizado dado por la [Ec.III.13]:

$$R_L = (2n + 1)^{\frac{1}{2}} R$$

siendo  $R$  la longitud magnética y  $n$  el correspondiente índice de Landau. Este parámetro, junto con la longitud de correlación de impurezas,  $L_i$ , [Parte I], permite establecer una importante condición en nuestro estudio del EHC. Así, si tenemos campos no demasiado elevados el radio de Larmor generalizado es grande y podemos asegurar que se cumple la relación

$$R_L \gg L_i$$

En estas condiciones, el electrón, debido al radio de su movimiento orbital, ve el campo eléctrico de la unión como un campo promedio uniforme y homogéneo, que nos lleva a reducir su contribución al hamiltoniano a un término de energía constante,  $U_0$ . Es decir:

$$U(\vec{r}) \approx U_0$$

Por tanto, el hamiltoniano quedaría

$$H = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + H_s + H_{s-o} + U_0 = H_0 + U_0$$

cuyos autovalores podemos resumir en la ecuación

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \hbar\omega_c + U_0$$

Ahora bien, a medida que aumentamos el campo magnético el radio de Larmor generalizado se va reduciendo de manera continua para cada nivel de Landau. Entonces, cuando el radio de la órbita se reduce de forma que el electrón puede *explorar* el potencial local de unas pocas impurezas ionizadas aparece una ruptura de la degeneración de los niveles de Landau, [Apéndice 3]. En el caso límite podemos considerar que el correspondiente término del hamiltoniano se simplifica a la expresión  $U_i(\vec{r})$ , debido a una sola impureza ionizada, [Apéndice 8], [Parte VIII]. Expresaremos esta condición de la siguiente forma

$$R_L \geq L_i$$

con lo que el hamiltoniano queda

$$H = H_0 + U(\vec{r})$$

donde el término  $H_0$  es el mismo que el de más arriba, y ahora introducimos la dependencia espacial explícita del potencial electrostático de la unión.

La [Fig.31] confirma esta variación que acabamos de explicar de la variación de la efectividad del potencial de la unión con el campo magnético.

Del análisis cualitativo que acabamos de realizar sobre las curvas experimentales presentadas en la [Parte VI], concluimos que, en correspondencia con el estudio teórico que desarrollamos en la [Parte IV], [Ec.IV.12], [Ec.IV.18], los únicos parámetros físicos necesarios para explicar el efecto Hall cuántico y el Shubnikov-de Haas son el tiempo de vida asociado a cada estado electrónico y el ancho de cada nivel de Landau, debido fundamentalmente a la presencia de impurezas ionizadas comunes a cualquier S2D real, [Parte I].

Una vez establecida esta conclusión podemos comenzar con los ajustes de los datos experimentales con el modelo. Conviene antes de nada hacer un esquema en forma de diagrama de flujo de cómo se obtienen las diferentes magnitudes físicas de transporte y equilibrio a partir de las medidas experimentales de magnetotransporte, [Fig.38(a)], y del modelo teórico, [Fig.38(b)]

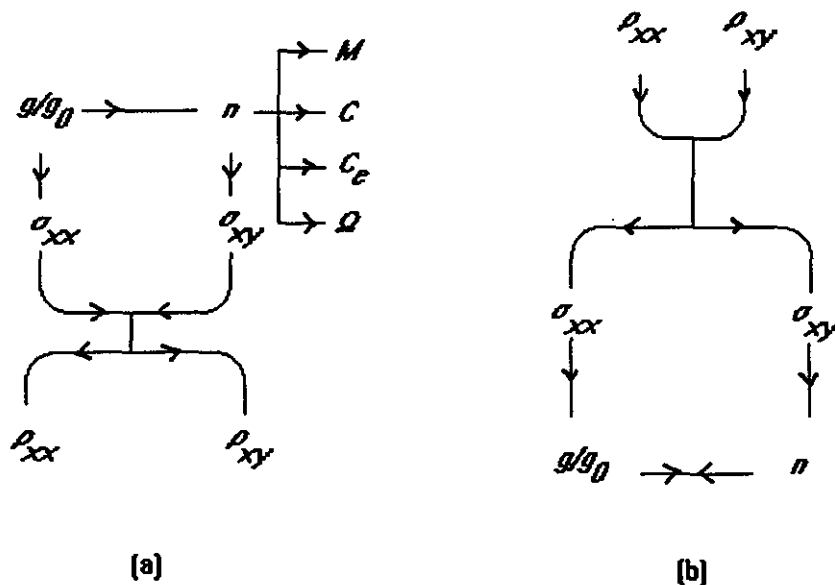


Figura 38: Diagrama de flujo para la obtención de las diferentes magnitudes físicas: (a) A partir del modelo teórico, (b) A partir de los resultados experimentales.

En relación con lo que acabamos de comentar, nuestro modelo teórico es un modelo de dos parámetros, ambos en general dependientes del campo magnético: El ancho de los niveles de Landau,  $\Gamma$ , y el tiempo de vida del correspondiente estado electrónico,  $\tau$ . No disponemos todavía de un método automatizado de ajuste global y la forma en la que hemos llevado a cabo los ajustes no es excesivamente rigurosa aunque, aun así, se obtienen buenos resultados. Por simplicidad tomamos siempre un  $\Gamma$  constante y para el tiempo de vida una forma basada en la *regla de oro de Fermi*, la *conjetura de Pippard*, [Shoenberg,84], que establece la siguiente relación entre el tiempo de vida a campo magnético nulo y el correspondiente a un valor determinado del mismo

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \frac{g(E_F)}{g_0}$$

donde el cociente entre las densidades de estado está expresado por la [Ec.III.26].

Para correr el modelo necesitamos escoger un perfil que represente los niveles de Landau. En la [Parte III] discutimos dos posibilidades, un perfil *gaussiano* o uno *lorentziano*. Se ha hecho un gran esfuerzo en el terreno teórico para deducir cuál es el que mejor represente la dependencia del ancho de los niveles de Landau con el campo magnético. Nosotros hemos utilizado el primero por ser el más aceptado en la bibliografía sobre los S2D, [Gerhardts,76,3], [Ando,85,4].

Por tanto, a partir del ajuste al término Hall de la magnetoconductividad, [Ec.IV.12], podemos extraer, suponiendo conocida la temperatura, información directa sobre  $A_{\Gamma p}$  y, en particular, el ancho de cada nivel de Landau, esto nos permite reconstruir la densidad de estados. Por otro lado, con la magnetoconductividad diagonal, [Ec.IV.18], el único parámetro que queda por ajustar es el tiempo de vida del correspondiente estado de energía, afectado por la temperatura, la intensidad de corriente, etc.

En la [Fig.39] presentamos el ajuste para la muestra 3 con  $V_g=0V$ , (Tabla I de la [Parte VI]).

Las discrepancias en el ajuste se debe a las condiciones que hemos impuesto para llevarlo a cabo. El método más óptimo es, como tenemos pensado hacer en un futuro, a partir de un ajuste punto a punto en campo magnético o en tensión de puerta.

En la [Fig.40] mostramos un nuevo ajuste esta vez para la muestra 1 con  $V_g=0V$ , (Tabla I de la [Parte VI])



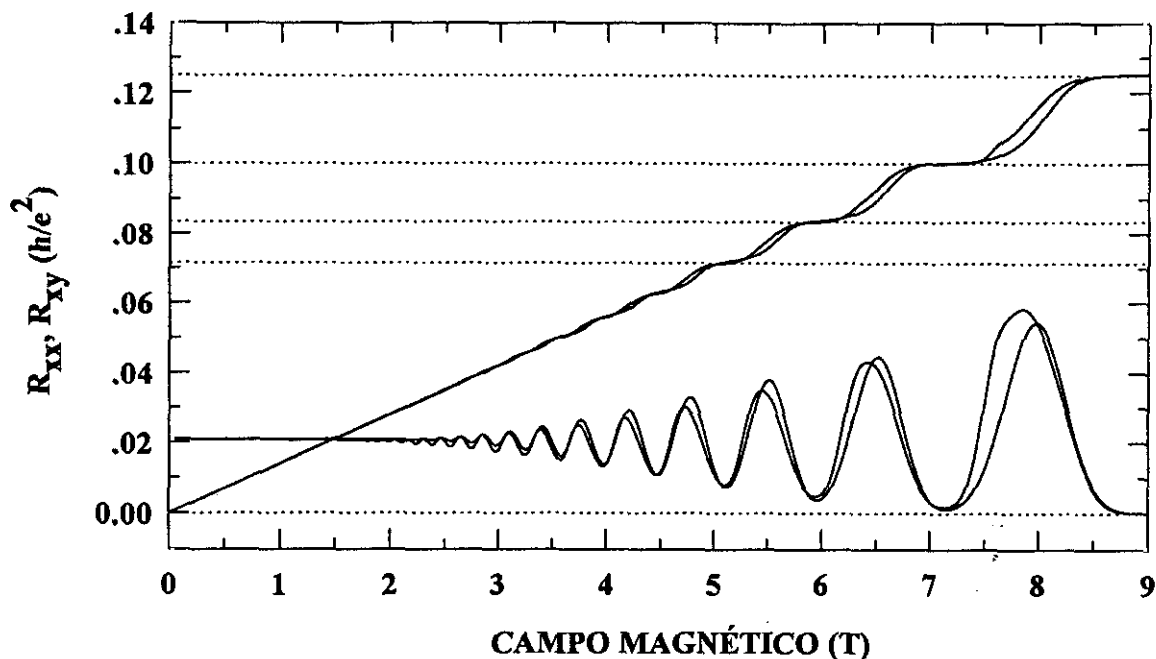


Figura 39: Ajuste de la magnetorresistencia diagonal y Hall para la muestra 3 ( $V_g=0V$ ) que posee una densidad de electrones  $n_0=1.728 \times 10^{16} m^{-2}$ ,  $m^*=0.0582m_0$ ,  $\mu=23100$ ,  $\tau_0=0.75ps$ ,  $T=1.2K$ . El parámetro de ajuste es  $\Gamma=0.26meV$ .

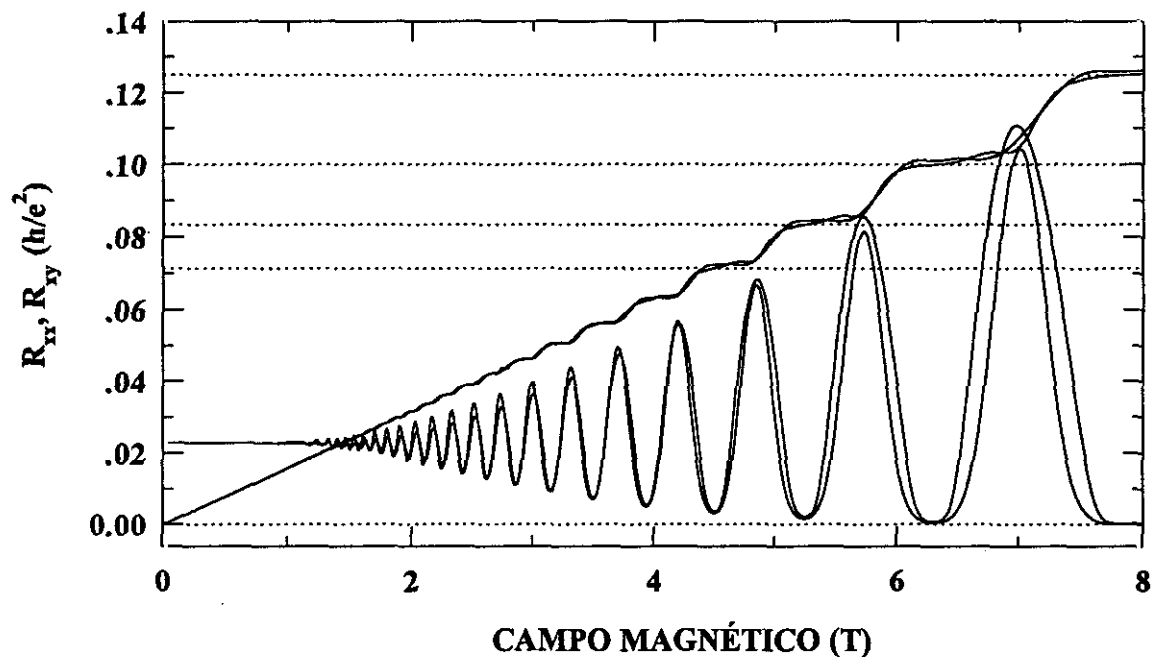


Figura 40: Ajuste de la magnetorresistencia diagonal y Hall para la muestra 1 ( $V_g=0V$ ):  $n_0=1.525 \times 10^{16} m^{-2}$ ,  $m^*=0.0604m_0$ ,  $\mu=24400$ ,  $\tau_0=0.84ps$ ,  $T=4.2K$ . El parámetro de ajuste es  $\Gamma=0.18meV$ .

En las medidas de magnetorresistencia Hall de la muestra 3 a  $V_g=+0.8V$ , (Tabla I de la [Parte VI]), obtuvimos un comportamiento anómalo en las mesetas que el modelo puede reproducir [Fig.41].

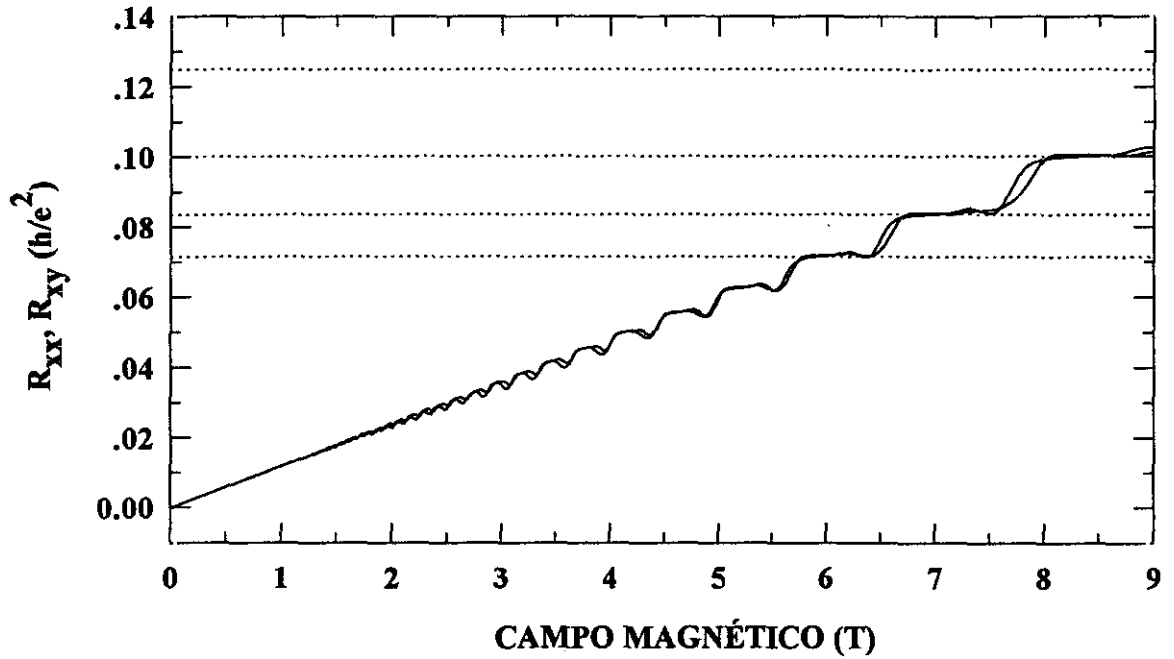


Figura 41: Ajuste de la magnetorresistencia Hall para la muestra 3 ( $V_g=+0.8V$ ).  $n_0=1.98 \times 10^{16} m^{-2}$ ,  $m^*=0.0582m_0$ ,  $\mu=23300$ ,  $\tau_0=0.77ps$ ,  $T=1.2K$ . El parámetro de ajuste es  $\Gamma=0.16meV$ .

# VIII

## EXTENSIONES DEL MODELO TEÓRICO

### 1. EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO

#### 1.1. INTRODUCCIÓN

La aparición del efecto Hall cuántico fraccionario (EHCF) en 1982 a dos años del descubrimiento del EHCE, [Tsui,82], [Chang,83,1], constituyó una completa sorpresa. En este nuevo fenómeno la magnetorresistencia Hall presentaba mesetas a valores de  $1/3$  y  $2/3$  de la unidad fundamental de magnetorresistencia,  $h/e^2$ , es decir:

$$\rho_{xy} = 3 \frac{h}{e^2}$$

Además, para los mismos intervalos de campo magnético, la magnetorresistencia diagonal  $\rho_{xx}$ , al igual que ocurría en el EHCE, presentaba mínimos.

Posteriormente, se observaron mesetas a otros valores fraccionarios:  $4/3$ ,  $5/3$ ,  $2/5$ ,  $3/5$ ,  $4/5$ ,  $2/7$ , [Störmer,83,1],  $1/5$ , [Willet,88,2], [Sajoto,93],  $3/7$ ,  $4/7$ ,  $4/9$ ,  $5/9$ , [Chang,84,2], etc. Lo primero que llamó la atención fué la aparición masiva de mesetas con valores de denominador impar. No obstante, más tarde se midieron mesetas a valores de denominador par:  $1/2$  y  $5/2$ , [Willet,87,1], [Eisenstein,92,3], [Suen,92], [Störmer,94,3], aunque su aparición siempre era mucho menos frecuente en número y menor la profundidad de los mínimos de la magnetorresistencia diagonal.

En un principio, se pensó que la aparición de valores de mesetas fraccionarias siempre inferiores a la unidad era algo característico del fenómeno. Sin embargo, los resultados experimentales posteriores han demostrado que el EHCF no es algo asociado al último nivel de Landau, y pueden aparecer a valores de  $4/3$ ,  $7/3$ ,  $7/5$ ,  $8/5$ ,  $9/7$ ,  $10/7$ ,  $11/7$ , etc, de la unidad fundamental de magnetorresistencia, [Clark,86], [Morawicz,93].

La única interpretación teórica existente es la debida a Laughlin, [Laughlin,83,3], [Laughlin,84,4], [Jain,92], [Apartado 1.3], quien desarrolló un modelo que interpreta el EHCF como consecuencia de la interacción electrón-electrón en el sistema electrónico, dando lugar a la formación de *cuasi*-partículas de carga fraccionaria. De este modo, generó una función de onda que daba cuenta de la meseta  $1/3$ . Más recientemente, se ha conseguido encontrar funciones de onda que justifican la existencia de otras mesetas como  $2/3$  y  $2/5$ , [Chakraborty,88].

Ahora bien, no hay ningún modelo que trate globalmente el problema y en la actualidad todo el esfuerzo se centra en la obtención de nuevas funciones de onda que sean capaces de dar explicación al resto de mesetas Hall.

La medida experimental de EHCF es complicada puesto que exige muestras de muy alta movilidad y temperaturas del orden de decenas del milikelvin. Nosotros no disponemos de ninguna de estas dos condiciones y nos hemos visto obligados a utilizar la bibliografía para tener de información experimental. Destaquemos algunas de las condiciones comunes a todo S2D que presente EHCF:

- 1) La densidad electrónica es muy baja.
- 2) Las mesetas de índice entero de la magnetorresistencia Hall aparecen simultáneamente a las fraccionarias, y mucho mejor definidas.
- 3) Hay una desproporción entre el número de mesetas con índice fraccionario par e impar.
- 4) El GE2D posee una alta movilidad, lo que no puede justificarse utilizando los argumentos de Laughlin, [Laughlin,81,1], [Prange,81,1], en relación a la necesidad de la existencia de una proporción de impurezas para la aparición del EHCE; en el caso del EHCF las muestras son de muy alta calidad.

El punto 2) nos hizo pensar que el EHCE y el EHCF estaban relacionados y eran dos aspectos de un mismo fenómeno. De tal modo que si podíamos explicar el primero dentro del marco de la aproximación de electrones libres, se podría hacer lo mismo con el efecto fraccionario.

En la figura que viene a continuación presentamos una excelente curva experimental que ilustra perfectamente el fenómeno del EHCF, obtenida por Willet *et al.*

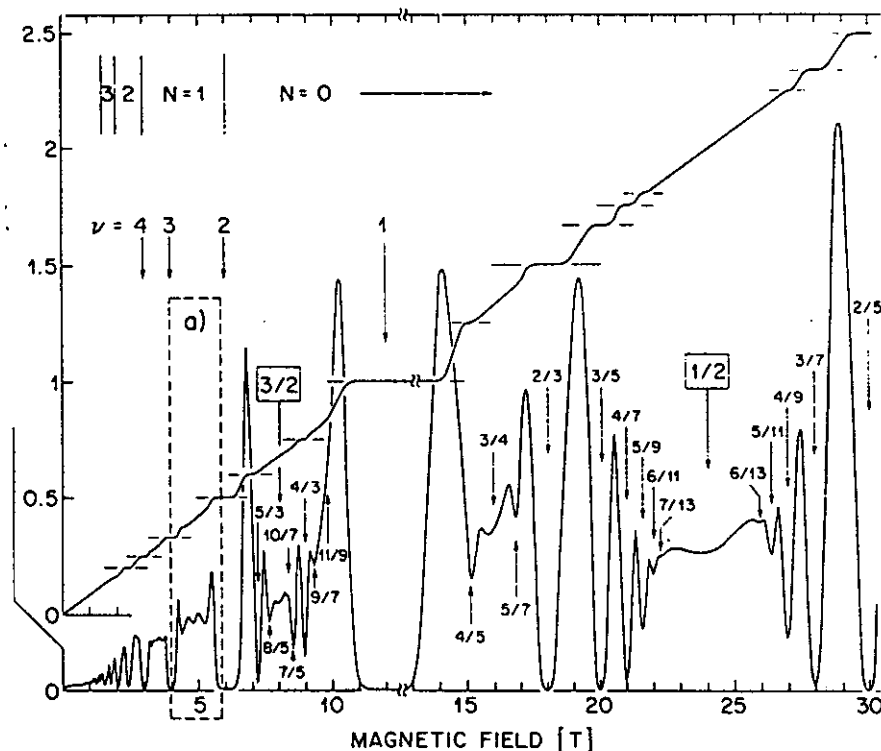


Figura 42: Magnetorresistencia Hall y diagonal en régimen de EHCF para una muestra de GaAs/AlGaAs con una densidad de electrones  $n_e = 3.1 \times 10^{15}$  y a una  $T = 150 \text{ mK}$ , [Willet, 87, 1].

## 1.2. EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO

Desde la década de los cincuenta, ha atraído gran atención el problema de la dinámica de los electrones a muy altos campos magnéticos. A pesar de ello, es un problema que aún permanece abierto. Los primeros esfuerzos los llevaron a cabo Kohn y Luttinger, [Luttinger, 58], [Kohn, 59], introduciendo el concepto de hamiltoniano equivalente, [Ziman, 64]. Este procedimiento consiste en la sustitución del efecto del hamiltoniano sin perturbación, el hamiltoniano de Bloch, por un operador  $H_{\text{efectivo}}(\vec{P} + e\vec{A})$ . Entonces, se efectúa un desarrollo en serie del mismo en función del campo magnético que, sin embargo, es solamente válido desde un punto de vista asintótico. Una aproximación diferente la llevó a cabo Wannier, [Wannier, 62, 1], quien supone que la periodicidad no se destruye con el campo magnético, y postula la existencia de autofunciones que se reducen a las de Bloch cuando el campo magnético se lleva a cero.

En esta última línea están los trabajos de Zak y Brown, [Brown,64], [Zak,64,1], [Zak,64,2], [Lifshitz,86], quienes dieron un enfoque similar al problema imponiendo periodicidad aun en presencia de campo magnético. Se propusieron obtener las propiedades generales exactas de la simetría de traslación de las funciones de onda de un electrón en la red cristalina bajo la aplicación de un campo magnético sin hacer ningún tipo de aproximación (campo débil o aproximación semiclásica). Así, definieron lo que llamaron el operador de traslación magnética del modo siguiente

$$T(\vec{R}_n) = \exp\left\{-i \frac{\vec{R}_n}{\hbar} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})\right\} \quad [\text{VIII.1}]$$

donde  $\vec{R}_n$  es un vector de la red cristalina. Este nuevo operador conmuta con el hamiltoniano, [Brown,64]:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r})$$

para cualquier vector de la red. Sin embargo, presenta el inconveniente de que el conjunto de operadores de traslación magnética no forman un grupo debido a que

1) no conmutan unos con otros

$$T(\vec{R}_1)T(\vec{R}_2) = T(\vec{R}_1 + \vec{R}_2) \exp\left\{-i \frac{e}{2\hbar} (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) \cdot \vec{B}\right\}$$

2) el producto de dos traslaciones magnéticas no es otro miembro del grupo

$$T(\vec{R}_1)T(\vec{R}_2) = T(\vec{R}_2)T(\vec{R}_1) \exp\left\{-i \frac{e}{\hbar} (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) \cdot \vec{B}\right\}$$

En estas dos ecuaciones  $\vec{R}_1$  y  $\vec{R}_2$  representan dos vectores arbitrarios de la red, y hemos utilizado el *gauge* simétrico.

De este modo, Brown y Zak postularon que la aplicación de un campo magnético uniforme no influye sobre la simetría de traslación del sistema, que permanece espacialmente periódica aunque, sin embargo, el hamiltoniano del electrón en el cristal, el electrón de Bloch, al estar sometido a este campo, pierde su simetría debido a que en él interviene el potencial vector que depende directamente de las coordenadas espaciales. La no invariancia del hamiltoniano complica la ley de transformación para las funciones de onda, y las conclusiones a las que se puede llegar se refieren únicamente a la forma general que debe adoptar el espectro energético. Así, una banda de Bloch (caracterizada por todos los posibles vectores de onda,  $\vec{k}$ ), se divide en un conjunto de subbandas al aplicar un campo magnético cuyo valor es un número racional, [Brown,64], [Lifshitz,86], [Zak,86,3].

Nosotros abordaremos el problema desde otro punto de vista, extendiendo los resultados deducidos en la [Parte IV], donde llegamos a la conclusión que incluso para campos tan elevados como 30T la aproximación de masa efectiva sigue siendo válida, y a pesar de que el radio de Larmor generalizado puede alcanzar valores próximos a los de la constante de red del sistema semiconductor, [Apéndice 8].

Comencemos planteando la cuestión de cómo es el espectro de energías del S2D por debajo del nivel de Fermi cuando atravesamos el último nivel de Landau.

En estas condiciones no se puede obtener una solución analítica para el problema, de modo que debemos intentar abordarlo de forma indirecta. Partiremos de dos de las conclusiones fundamentales que obtuvimos en la [Parte III] y [Parte IV]:

1) La posición del nivel de Fermi para un S2D queda fijado por el resto de la heteroestructura semiconductor.

2) El parámetro que caracteriza el estado energético de un electrón en presencia de un campo magnético es la longitud magnética,  $R$ .

En este punto conviene recordar la expresión para la distribución de impurezas ionizadas en la [Parte IV], dada por

$$L_i = \frac{1}{2} N_i^{-\frac{1}{2}}$$

Así, al hilo de la cuestión anterior, podemos preguntarnos qué ocurre cuando el campo magnético para una densidad de electrones determinada es tal que el correspondiente radio de Larmor generalizado de la órbita ciclotrón es del orden de la longitud de correlación de impurezas,  $L_i$ . Es decir, cuando se cumple la condición

$$R_L \leq L_i \quad \text{[VIII.2]}$$

Usando los argumentos que empleamos de la [Parte VII], esto puede interpretarse del siguiente modo: al describir su órbita, cada electrón interactúa únicamente con el potencial electrostático de cada impureza ionizada,  $U_i(\vec{r})$ , [Apéndice 8].

Analicemos los órdenes de magnitud de los principales parámetros. Considerando la longitud de onda del electrón como del orden de la longitud magnética, para un campo de 10T sería del orden de 80Å. Por otro lado, la distancia media entre dos impurezas ionizadas para una concentración de  $2.6 \times 10^{15} \text{m}^{-2}$ , es de aproximadamente 100Å, es decir, el radio de la trayectoria que describe el electrón debido al campo magnético es más pequeño que la distancia media entre las impurezas. Esto es el punto fundamental de nuestra descripción del EHCF. En estas condiciones, hay que analizar en qué medida la perturbación debida a un campo eléctrico de la unión puede llevar a un

desdoblamiento de los niveles degenerados. Si la simetría de la perturbación es menor que la del sistema no perturbado, la simetría del hamiltoniano  $H$  coincidirá con la simetría de la perturbación, en nuestro caso,  $U_i(\vec{r})$ , de simetría esférica. Así, las funciones de onda que forman la base del hamiltoniano sin perturbar,  $H_0$ , serán también base del operador perturbado  $H$ , y como puede ocurrir que esta representación sea reducible, esto significa un posible desdoblamiento del nivel degenerado.

El hamiltoniano que estudiaremos es el siguiente

$$H(\vec{r}) = \frac{1}{2m^*}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + H_c + U_i(r) + H_{s-o} \quad [\text{VIII.3}]$$

con el *gauge* simétrico. Seguiremos suponiendo que el campo eléctrico,  $\vec{E}^t$ , es lo suficientemente débil como para poder despreciar su efecto sobre el espectro electrónico. Por otro lado, consideraremos que la interacción electrón-electrón, al igual que en el caso del EHCE, hace finito el tiempo de vida de cada estado estacionario.

En la [Parte III] expresábamos los niveles de Landau de forma general como sigue, [Ec.III.14]:

$$E = \frac{\hbar\omega_c}{2} \frac{R_L^2}{R^2}$$

Luego, con el campo magnético exploraremos los valores del cociente  $R_L^2/R^2$ . En el caso del EHCE encontramos que éste adoptaba la forma, [Ec.III.13]:

$$\frac{R_L^2}{R^2} = (2n+1)$$

cuantizado a valores enteros. Por otro lado, en la [Parte IV] dedujimos que existía una relación directa en el EHCE entre el índice del nivel de Landau y el correspondiente de la meseta Hall. Siguiendo estos razonamientos, concluimos que el EHCF está caracterizado por la cuantización del radio de Larmor generalizado debido a la acción del potencial electrostático,  $U_i(\vec{r})$ , de forma que nos queda

$$\frac{R_L^2}{R^2} = \frac{2i}{j} \quad [\text{VIII.4}]$$

y que se traduce, a su vez, en una cuantización de los estados energéticos del electrón, que serán

$$E_{n,j,j} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{i}{j} \right) \pm \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \hbar\omega_c \quad [\text{VIII.5}]$$

donde  $n=0, 1, 2, 3...$  corresponde al índice de Landau descrito en la [Parte III] y los índices  $i, j$  números naturales que pueden tomar los valores  $1, 2, 3, \dots$ , de modo que su cociente sea siempre menor que uno.



La [Ec.5] es una generalización de la [Ec.III.6]; donde el último término corresponde al desdoblamiento de espín debido al los términos de espín y espín-órbita del hamiltoniano. Así, si suponemos que estamos en la región de campo magnético para las que el último nivel de Landau de índice entero aparece al nivel de Fermi, los posibles estados de energía para el electrón vendrán determinados por la ecuación

$$E_{i,j} = \hbar\omega_c \frac{i}{j} - \frac{g^*}{4} \frac{m^*}{m} \hbar\omega_c$$

donde hemos tomado  $n=0$  y el término de espín de la forma indicada ya que todos los electrones tienen orientado su espín en la misma dirección.

Por tanto, según nuestra interpretación, el EHCF se debe al desdoblamiento de los niveles de Landau en subniveles de índice fraccionario, de manera que en un S2D al aumentar el campo magnético los niveles que atraviesan el nivel de Fermi son niveles fraccionarios de valor cada vez menor.

Antes de seguir adelante analicemos cómo son los parámetros básicos en condiciones de EHCF para muestras que se encuentran en la bibliografía:

MUESTRA	$n_e$ ( $10^{16} \text{m}^{-2}$ )	$L_i$ (Å)	$d$ (Å)	$R_L$ (Å)
(a)	0.03	288	400	150
(b)	0.05	223	400	140
(c)	0.17	121	400	122
(d)	0.112	150	400	115
(e)	0.21	110	400	105
(f)	0.3	91	100	87

Tabla I: *Densidad de electrones, longitud promedio de las impurezas ionizadas, distancia entre el S2D y la región de impurezas y radio de Larmor generalizado para el último nivel de Landau de índice entero. Las muestras están tomadas de la bibliografía: (a)[Willet,88,2], (b)[Willet,88,2], (c)[Morawicz,93], (d)[Störmer,94,3], (e)[Chang,83,1], (f)[Willet,87,1].*

Hay una consecuencia fundamental que podemos extraer de esta tabla: en todas las muestras, la aparición del EHCF va acompañada de un radio generalizado de Larmor de los electrones menor que la longitud de correlación de impurezas. Esto apoya nuestra idea sobre la importancia del campo eléctrico de la unión de cada impureza ionizada en la formación de estos estados de energía de índices fraccionarios.

En la figura siguiente hacemos un esquema de la acción del campo eléctrico de cada impureza ionizada sobre el electrón al recorrer su órbita ciclotrón

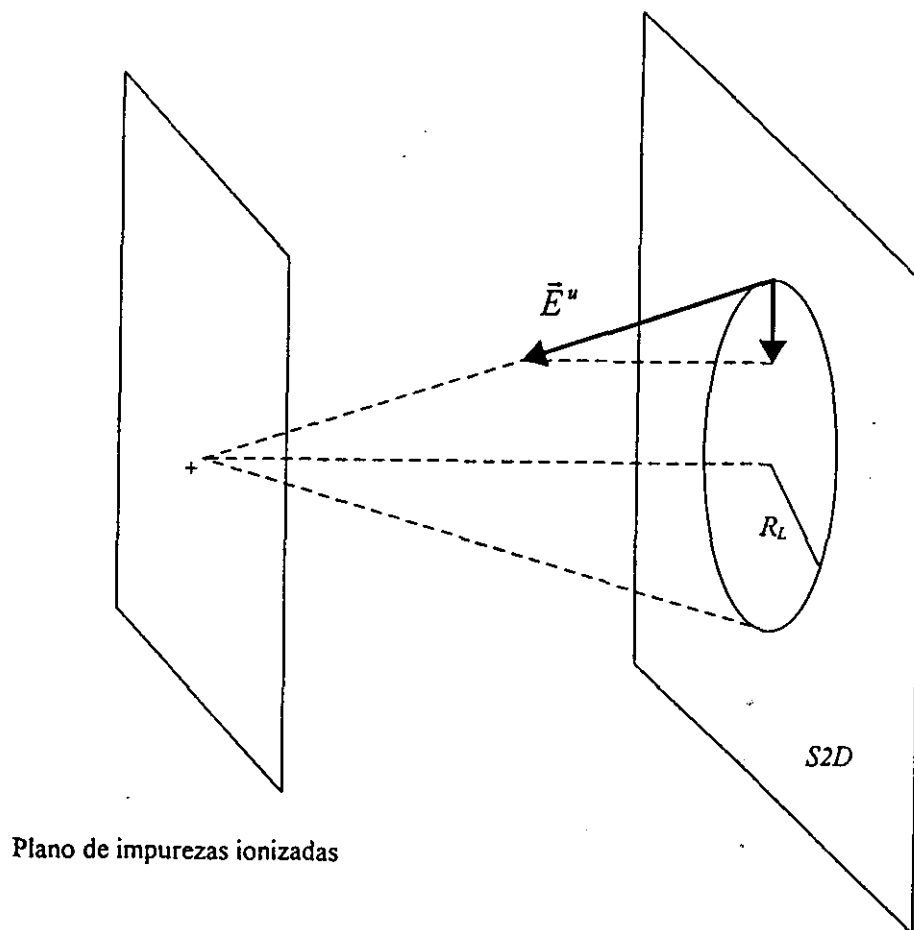


Figura 43: *Campo eléctrico debido a cada impureza ionizada actuando sobre un electrón del S2D al describir su órbita ciclotrón.*

La componente de campo eléctrico en la dirección  $z$ , perpendicular al S2D, representa el campo de deriva que aparece en cualquier heteroestructura semiconductor, y que está compensado con el campo de difusión. Sin embargo, su proyección sobre el S2D es el campo eléctrico fundamental en la determinación del EHCF.

Podemos establecer una analogía entre la energía potencial debida a la componente del campo eléctrico de la unión sobre el S2D y la energía potencial electrostática de un electrón sometido a la acción de un campo de fuerzas central, que se caracteriza por la cuantización del momento angular orbital. Extrapolando esta idea, asociamos el fenómeno del EHCF a la ruptura de

la degeneración del momento angular orbital de cada nivel de Landau debido a la proyección del campo eléctrico de la unión sobre el plano del S2D.

Una vez determinado el espectro energético, como ocurría en el caso de las mesetas de la magnetoconductividad de índice entero, relacionadas directamente con los índices enteros de los niveles de Landau, [Parte IV], las de índice fraccionario no son más que una consecuencia de la aparición de niveles de Landau de índice fraccionario debido a la cuantización de las órbitas ciclotrón.

Así pues, las ecuaciones correspondientes al EHCF y SdH serán exactamente las mismas que para el EHCE, es decir,

$$\sigma_{xx} = \frac{en_0}{B\omega_c\tau} \frac{g(E_F)}{g_0}$$

para la magnetoconductividad diagonal, y

$$\sigma_{xy} = -\frac{en}{B} = -\frac{e}{B}(n_0 + \delta n)$$

para la magnetoconductividad Hall, y la única diferencia estará en la aparición de una densidad de estados con niveles de índice fraccionario, dando lugar a una fluctuación equivalente de la densidad de electrones. En el [Apéndice 7] se presenta una simulación del EHCF para la familia de índices 1/3. El que sólo se pueda desarrollar para una familia se debe a las limitaciones de la fórmula extendida de la suma de Poisson.

Una de las cuestiones más sorprendentes en relación al EHCF es la mayor aparición de mesetas Hall con denominador impar. Sin embargo, dentro de nuestro esquema este fenómeno aparece de forma natural. Efectivamente, si tomamos, por ejemplo, un máximo valor para  $j$  de 15 en la [Ec.5], y calculamos el conjunto de posibles números racionales inferiores a la unidad que pueden construirse con el cociente  $i/j$ , nos aparecen fracciones irreducibles con denominador impar en una proporción del 65% frente a las de denominador par.

Haciendo una representación del cociente  $i/j$  respecto a sí mismo, [Fig.44], la secuencia e importancia relativa de cada meseta fraccionaria que muestran las curvas experimentales de EHCF queda justificada por la separación existente entre los diferentes cocientes

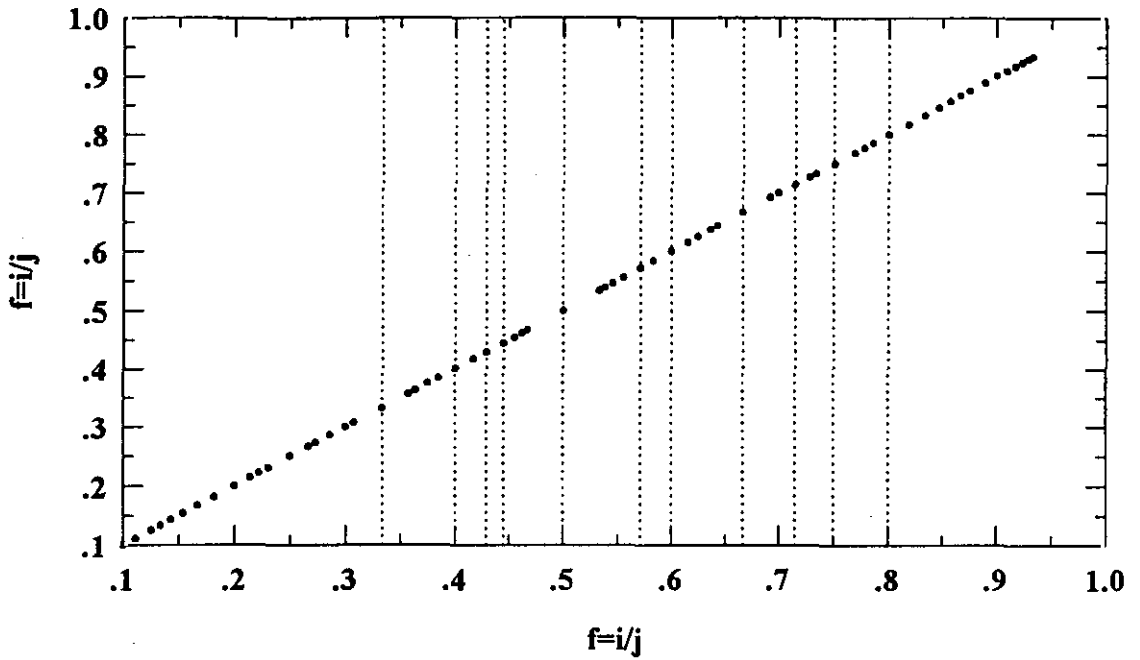


Figura 44: Representación de todos los posibles cocientes,  $i/j$ , por debajo de uno, con un valor máximo para  $j$  de 15. Hay que destacar que la separación existente entre los diferentes niveles de Landau de índice fraccionario coincide perfectamente con la observada en esta representación. Además, la estadística de puntos con índice impar es mucho mayor que las de índice par.

Nos queda por acotar los límites a los posibles valores fraccionarios que puede tomar el espectro energético del electrón. La condición física que limita este número está determinada por la ecuación

$$R_L \approx a$$

donde  $a$  es el parámetro de la red cristalina y, como siempre,  $R_L$  el radio de Larmor generalizado. En estas condiciones el término cinético deja de ser el término fundamental del hamiltoniano, lo que lleva a que los estados del electrón cambien de naturaleza, y se produzca una fuerte localización del electrón en torno a cada átomo de la red. Esto explica las observaciones del rápido crecimiento de la magnetorresistencia diagonal y Hall a altos campos magnéticos cuando llegamos a este límite, [Störmer,83,1], [Eisenstein,92,3], [Goldman,93]. Su carácter de estado localizado se pone de claramente de manifiesto en el comportamiento con la temperatura, con la que ambas magnetorresistencias decrecen rápidamente, [Clark,86], [Willet,88,2].

### 1.3. OTROS MODELOS TEÓRICOS SOBRE EL EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO

En la introducción mencionamos el modelo de Laughlin, [Laughlin,83,3], [Laughlin,84,4], que abordó el problema del EHCF buscando funciones de onda que describieran el estado fundamental y excitado de *objetos* de carga fraccionaria.

Asoció los *gaps* en el espectro electrónico con la densidad de ceros permitidos en la función de onda de los  $N$  electrones,  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ , función del llenado del último nivel de Landau. Se supone en todo el desarrollo que se hace a continuación que el campo magnético lleva a una completa polarización de los electrones.

Analicemos el siguiente experimento *gedanken*. Tomemos uno de los electrones, por ejemplo, el  $i$ -ésimo, y consideremos un circuito cerrado para el mismo,  $\sum_i \vec{a}_i$ , que supondremos define el perímetro del S2D. Efectuemos la transformación siguiente sobre la función de onda

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \rightarrow \Psi'(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \prod_i T(\vec{a}_i) \Psi$$

donde el operador  $T(\vec{a}_i)$  corresponde a los operadores de traslación magnética que definimos en la [Ec.1], [Brown,64], [Zak,64,1], [Zak,64,2]. Entonces, podemos expresar la función de onda transformada por la ecuación

$$\Psi' = \exp \left\{ -2\pi i \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Phi_0} \right\} = \exp \left\{ 2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0} \right\} \Psi \quad [\text{VIII.6}]$$

donde  $\Phi = SB$  es el flujo total que atraviesa el área  $S$  del sistema y  $\Phi_0 = h/e$ , la unidad fundamental de flujo. Entonces, si tenemos que

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = mN$$

siendo  $m$  un racional, podemos afirmar que para una fracción de llenado  $\nu = 1/m$  hay  $\nu$  electrones por cuanto de flujo en el área de la muestra. Como se deduce de la [Ec.6], la fase de la función de onda cambia como resultado del experimento en la magnitud  $-2\pi m$  para cada electrón contenido en la superficie del sistema.

Por otro lado, como vimos en la [Parte III], la función de onda de un electrón en el nivel de Landau más bajo puede escribirse en el *gauge* simétrico, [Ec.III.8], como

$$\psi(\vec{r}_i) \approx P(z_i) \exp\left\{-\frac{|z_i|^2}{4}\right\}$$

siendo  $P(z_i)$  un polinomio en la variable de posición del electrón,  $z_i = x_i - iy_i$ , que viene determinado por la cuantización del momento angular orbital. Así, la función de onda del electrón,  $\psi(\vec{r}_i)$ , cambia su fase en  $-2\pi$  alrededor de un punto para el que  $P(z_i)$  tiene un cero simple y en  $-2\pi m$  alrededor de un punto para el que el polinomio tiene un cero de orden  $n$ . Por otra parte, de la [Ec.6] se deduce que para cada electrón del sistema, la función de onda  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  de los  $N$  electrones debe tener  $mN$  ceros en función de las coordenadas de posición  $z_i$ . Esto es equivalente a un cero por cuanto de flujo o  $m$  ceros por partícula.

Así, el EHCF surge como consecuencia de la conexión de los ceros de la función de onda como función de la coordenada  $z_i$  con las coordenadas de cada uno del resto de electrones, lo que será solamente posible para ciertos valores impares,  $m$ , si la función de onda ha de describir fermiones y poseer forma analítica, [Halperin,83,2], [Isihara,91,4], [Isihara,92,5], [Butcher,93]. Esto representa uno de los límites más fuertes del modelo de Laughlin y, por otro lado, lo que llevó a Halperin, [Halperin,83,2], a asociar un carácter bosónico a los electrones al atravesar una meseta Hall con índice de denominador par. La conexión entre los  $m$  ceros con las posiciones de las partículas tenderá a minimizar la energía de interacción entre dos partículas puesto que la probabilidad de que una partícula  $i$  esté próxima a otra  $j$  podemos escribirla como

$$|\psi(\vec{r}_i, \vec{r}_j)|^2 \approx |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{2m}$$

a medida que  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \rightarrow 0$ . Si los ceros fueran cercanos pero no coincidentes, la probabilidad de proximidad de dos electrones sería pequeña.

Por tanto, es de esperar que aparezca un *gap* en el espectro electrónico para valores del llenado próximos a  $1/m$ , puesto que en este caso no sería posible variar el número de electrones o cuantos de flujo sin sumar o quitar ceros a la función de onda. Esta adición o sustracción de cuantos de flujo llevaría a excitaciones que se caracterizan por una carga fraccionaria. Efectivamente, como los  $m$  ceros de la función de onda del estado fundamental están asociados con las posiciones del electrón, la adición o sustracción de un cero está relacionado con la aparición de cargas electrónicas de valores  $\pm 1/m$ , [Chakraborty,88], [Butcher,93].

Basándose en estas ideas Laughlin propuso la siguiente función de onda de prueba

$$\Psi_L(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \exp \left\{ - \sum_i \frac{|z_i|^2}{4} \right\} \quad [\text{VIII.7}]$$

en la que todos los ceros, en función de la coordenada  $z_i$ , son coincidentes con las coordenadas de posición del resto de electrones.  $\Psi_L$  únicamente puede describir electrones en el nivel de Landau más bajo ya que utiliza la función de onda monoeléctronica para el primer nivel de Landau. Esto supone una limitación de la función prueba de Laughlin toda vez que experimentalmente se han observado mesetas de efecto Hall para índices fraccionarios mayores de la unidad.

Actualmente, los esfuerzos en el terreno teórico se fundamentan en la búsqueda de funciones de onda que puedan dar cuenta de los índices superiores a la unidad, [Jain,92], [Morawicz,93].

Escribiendo ahora  $|\Psi_L|^2$  como una función de distribución clásica  $\Psi_L$  describiría un fluido, [Laughlin,83,3]. Es decir, podemos expresar la [Ec.7] de la forma

$$|\Psi_L|^2 \approx \exp\{-\beta V\} \quad [\text{VIII.8}]$$

siendo  $\beta=2/m$  y

$$V = m^2 \left( - \sum_{i < j}^N \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right)$$

Si  $\beta$  se considera como  $1/kT$ , la [Ec.8] representa el factor de Boltzman de un plasma bidimensional de un componente (2DOCP) de energía potencial  $V$ , [Isihara,92,5]. Este posee partículas de carga  $m$  con una interacción logarítmica entre ellas y sobre un fondo neutro de carga. Puede demostrarse que para  $2m < 140$  la [Ec.8] describe un fluido incompresible, [Laughlin,90,6], [Chakraborty,88], ya que la longitud magnética,  $R$ , no puede modificarse sin introducir o quitar cuantos de flujo, lo que implica excitaciones a través del *gap*.

No vamos a profundizar más en la descripción del modelo de Laughlin ya que únicamente pretendíamos reflejar las ideas básicas en las que se basa actualmente el estudio teórico del EHCF. Y aunque el campo se está haciendo extraordinariamente especializado en cuanto a aparato matematico: teorías de escala, [Laughlin,85,5], teorías de campo y estadísticas intermedias (aniones), [Jain,92], las ideas físicas que se manejan son las que acabamos de exponer.

## 2. SISTEMAS CUASI-UNIDIMENSIONALES

## 2.1.INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la tecnología de semiconductores ha permitido en los últimos años fabricar sistemas electrónicos cuyo comportamiento puede asociarse al de un sistema físico *cuasi*-unidimensional (S1D). Este Apartado lo dedicaremos a estudiar el transporte electrónico en estos sistemas, [Wharam,88], aunque los resultados que obtenemos son igualmente aplicables al llamado transporte balístico, [Wees,88,1], [Wees,91,2], (en este último artículo hay una excelente recopilación sobre el tema hasta 1991).

A lo largo de este apartado mostraremos cómo el fenómeno de cuantización en los S1D está basado en ideas similares a las que acabamos de discutir para los S2D.

Los primeros resultados experimentales sobre S2D en los que una de las dimensiones era muy pequeña fueron obtenidos por Fang y Stiles al principio de la década de los ochenta y en plena excitación por la aparición del EHC, lo que constituyó el principal escollo para su difusión, [Fang,83,1], [Fang,84,2]. Sus resultados han permanecido lejos de las referencias habituales ya que eran aparentemente contradictorios con los resultados esperados de EHC. Llevaron a cabo diferentes medidas de magnetorresistencia diagonal en función de la tensión de puerta a un campo magnético fijo de 15T, cortocircuitando la muestra en diferentes puntos. En la figura siguiente se presentan sus resultados experimentales.

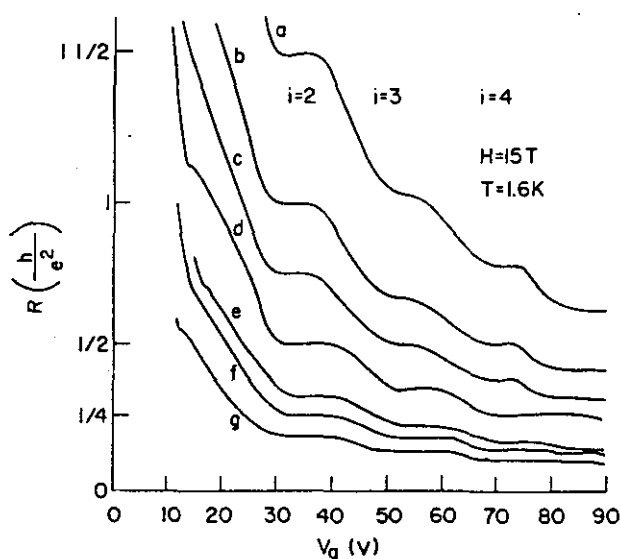


Figura 45: Medidas de magnetorresistencia sobre un GE1D de Fang y Stiles, [Fang,84,2].



De estas medidas hay que destacar

- 1) La aparición de mesetas en lo que se supone son medidas de  $R_{xx}$ .
- 2) La obtención de mesetas a valores que no son ni enteros ni siquiera, en muchos casos, fraccionarios.

Sin embargo, en el [Apartado 2.3] vamos a comprobar que estos resultados coinciden con los esperados para la cuantización de la magnetorresistencia de un S1D.

## 2.2. DENSIDAD DE ESTADOS DE UN SISTEMA CUASI-UNIDIMENSIONAL

Landauer, [Landauer,70], fue el primero que, desde un punto de vista teórico, se planteó el problema de la conductividad en hilos. Sus ideas fueron generalizadas por Buttiker, [Büttiker,86,1], [Büttiker,88,2], extendiéndolas a sistemas más complejos.

Nuestro enfoque es diferente y se inspira en el desarrollo llevado a cabo para los S2D en función de la tensión de puerta. Comenzaremos obteniendo la densidad de estados de un S1D.

Cuando tenemos aplicado un campo magnético sobre un S2D, y aplicamos un potencial de confinamiento para conseguir el S1D producimos una ruptura de la degeneración de los niveles de Landau del S2D que nos permite asociar a cada electrón una velocidad de grupo, [Ec.II.11].

Consideremos un electrón moviéndose en el plano  $xy$  bajo la aplicación de un campo magnético constante y aplicado en la dirección  $z$ . Introduzcamos entonces un potencial de confinamiento de tipo parabólico que limite el movimiento del electrón en la dirección  $y$  de manera que generemos un hilo en la dirección  $x$ . Hay que tener en cuenta que el tomar esta forma para el potencial de confinamiento es una elección completamente arbitraria ya que es imposible determinar cómo es en un sistema físico real; sin embargo, parece razonable físicamente y, sobre todo, permite obtener una solución analítica de la correspondiente ecuación de Schrödinger. Por tanto, el hamiltoniano para el electrón estará dado por la ecuación

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m^*} + \frac{\kappa}{2}y^2 + H_z$$

En la dirección  $x$  del hilo imponemos condiciones de contorno periódicas. Para resolver la ecuación de Schrödinger tomaremos el *gauge* de Landau, dado por la [Ec.III.9]. De esta forma, las

autofunciones del hamiltoniano son productos de ondas planas y funciones del oscilador armónico, dadas por los polinomios de Hermite. Así, podemos llegar a la solución

$$\psi_{nk}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx) \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n! l_{hc})} H_n\left(\frac{y-y_k}{l_{hc}}\right) \exp\left\{-\frac{(y-y_k)^2}{2l_{hc}}\right\}$$

donde  $L$  es la longitud del hilo cuántico, e  $y_k$  está dada por la expresión

$$y_k = \frac{\omega_c \hbar k}{m^* \omega_{hc}^2} = (1 + \gamma)^{-\frac{1}{2}} k l_{hc}^2$$

con

$$\omega_{hc} = (1 + \gamma)^{\frac{1}{2}} \omega_c$$

y

$$l_{hc} = (1 + \gamma)^{-\frac{1}{4}} R$$

siendo  $R$  la longitud magnética, [Ec.III.12]. El parámetro adimensional  $\gamma$  caracteriza la intensidad del potencial de confinamiento y está definido por la ecuación

$$\gamma \equiv \frac{\kappa}{m^* \omega_c^2}$$

Por otro lado, los autovalores correspondientes son

$$E_{nk} = \hbar \omega_{hc} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{hc}} \quad [\text{VIII.9}]$$

donde el índice  $n$  puede tomar los valores  $n=0,1,2,\dots$ , y donde  $m_{hc}$  es una masa renormalizada y definida por la expresión

$$m_{hc} = \frac{1 + \gamma}{\gamma} m^*$$

cuyo comportamiento en función del campo magnético está estudiado con todo detalle en la bibliografía, [Tan,94]. De este modo, como ya comentábamos anteriormente, el potencial de confinamiento rompe la degeneración de los niveles de Landau a través de la dependencia en  $k$ , por lo que tenemos una relación de dispersión que corresponde a la de una partícula libre pero con una masa renormalizada. Cuando la intensidad del potencial de confinamiento va a cero, la masa  $m_{hc}$  tiende a infinito, en correspondencia con la degeneración de los niveles de Landau; mientras que en el límite opuesto,  $\gamma \rightarrow \infty$ , la masa renormalizada se hace igual a la masa efectiva del electrón,  $m^*$ . El hecho de que aparezca una relación de dispersión nos permite definir una velocidad de grupo para los electrones en el cristal unidimensional de forma similar a su definición en los S3D

$$v_{nk} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{nk}}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m_{hc}}$$

Si el potencial de confinamiento no es tan simple como un potencial parabólico, la relación entre la velocidad de grupo y el vector de onda se hace más complicada, aunque el método que vamos a desarrollar a continuación es igualmente aplicable modificando únicamente la expresión para esta velocidad.

Por otro lado, en un S1D el efecto del campo magnético se reduce a la variación de la separación entre cada subbanda, [Wharam,88], [Wees,91,2], [Apéndice 1].

A la vista del espectro energético obtenido, y usando el resultado para la forma de la densidad de estados de un S1D que obtuvimos en el [Apéndice 1]:

$$g(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \left( \frac{m_{hc}}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{VIII.10}]$$

donde se está teniendo en consideración la degeneración de espín. Podemos concluir que la forma de la densidad de estados global de un S1D tiene el perfil siguiente

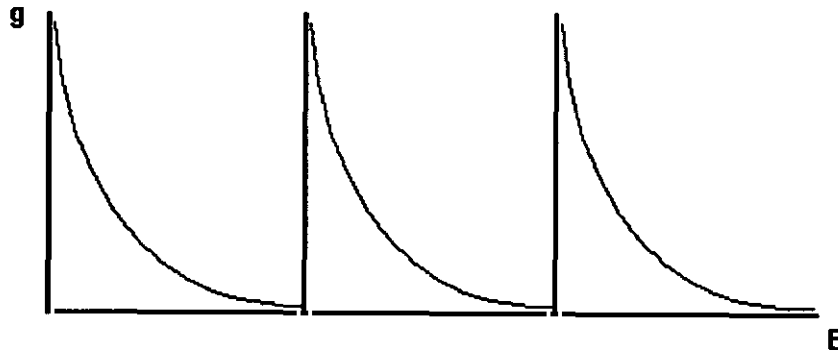


Figura 46: Densidad de estados general para un S1D. La densidad de estados de cada subbanda viene dada por la [Ec.10].

## 2.3. MAGNETORRESISTENCIA DE UN SISTEMA CUASI-UNIDIMENSIONAL

Una vez que hemos obtenido la densidad de estados, podemos calcular la magnetoconductividad. En este caso, puesto que el vector de onda vuelve a ser un buen número cuántico, tenemos, [Ec.II.20]:

$$\sigma_{1D} = \frac{e^2 n \tau}{m_{hc}}$$

donde, al escribirla de esta forma estamos teniendo considerando únicamente los electrones al nivel de Fermi. En este caso el factor responsable de la aparición de las mesetas es, como ocurría en los S2D en tensión de puerta, el perfil de la densidad de estados de los S1D, [Fig.46].

Recordando que la magnetorresistividad está dada por la ecuación

$$\rho = 1/\sigma$$

la magnetorresistencia de un S1D puede expresarse de la forma

$$R_{1D} = L\rho = \frac{m_{hc}}{e^2 n \tau}$$

que viene dada directamente en unidades de  $h/e^2$ . El hecho de que, al contrario de lo que ocurre en los S2D, la magnetorresistencia dependa de las dimensiones del hilo cuántico, tiene una importancia fundamental para interpretar los resultados experimentales y en particular el desplazamiento que aparece en las mesetas de la magnetorresistencia respecto de sus valores enteros.

En la [Fig.47] presentamos una simulación de los efectos cuánticos de un GE1D para diferentes dimensiones del sistema. Como vemos, el tipo de curvas que obtenemos coincide perfectamente con las medidas efectuadas por Fang y Stiles, [Fig.45].

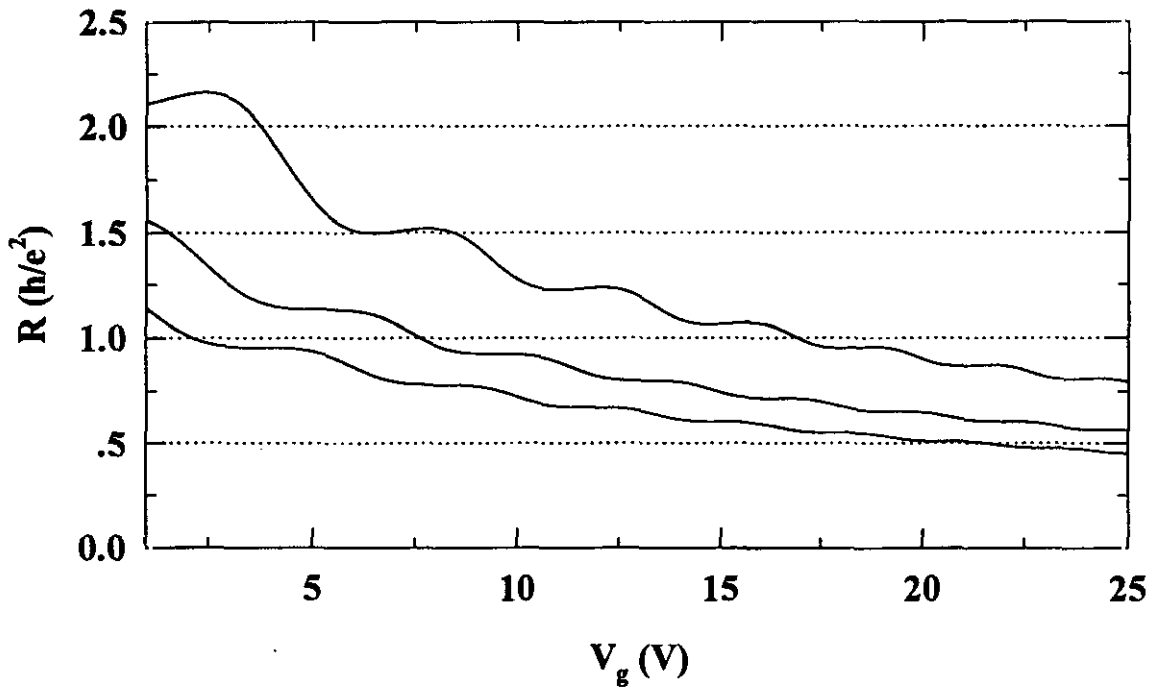


Figura 47: Simulación de los efectos cuánticos sobre hilos de diferente longitud.

Así pues, podemos concluir que el fenómeno de cuantización de la magnetorresistencia de los S1D se debe, como ocurría en el caso del EHCE de los S2D en función de la tensión de puerta, a la estructura particular de la densidad de estados. No obstante, en este caso, nunca se puede llegar a conseguir una buena cuantización puesto que la densidad de estados se anula.

Por otro lado, la cuantización está directamente relacionada con el número de subbandas ocupadas. Experimentalmente, [Wees,91,2], se observa que el ancho de las mesetas mejora a medida que aumentamos el campo magnético, cuya razón, a la luz de nuestro modelo, reside únicamente en el hecho de que la separación entre cada subbanda aumenta con el campo magnético, [Ec.9].



# CONCLUSIONES

1. Hemos realizado medidas experimentales de las componentes diagonal ( $R_{xx}$ ) y no diagonal ( $R_{xy}$ ) de la magnetorresistencia transversa en el gas de electrones bidimensional y desarrollado un modelo para el cálculo de las correspondientes componentes de la magnetoconductividad:  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$ .

2. Las muestras del gas de electrones 2D son pozos cuánticos con canal bidimensional de  $In_xGa_{1-x}As$  y barrera de  $Al_yGa_{1-y}As$ . Son heteroestructuras MODFET con procesado en forma de barra Hall.

3. En la técnica experimental se alimenta la muestra en corriente continua entre dos puntos y se mide la diferencia de potencial entre otros dos (técnica de las cuatro puntas). Hemos medido ambas magnetorresistencias tanto en función del campo magnético aplicado como la tensión de puerta y esto a varias temperaturas. El campo magnético máximo es 12T y la temperatura mínima 1.2K.

4. La componente no diagonal presenta mesetas de efecto Hall cuántico a valores de  $h/e^2n$ , donde  $n$  es un número entero. Sin embargo, la componente diagonal presenta oscilaciones Shubnikov-de Haas periódicas en  $1/B$  cuya frecuencia depende del número de electrones. A los valores del campo magnético donde se observan mesetas en  $R_{xy}$  aparecen mínimos, eventualmente ceros, en  $R_{xx}$ .

5. Hemos analizado los perfiles de las oscilaciones SdH y observamos una clara asimetría de las mismas en función del campo magnético. Sin embargo, esta asimetría es similar para un mismo nivel de Landau de diferentes muestras.

6. En las medidas de la magnetorresistencia diagonal en tensión de puerta a diferentes campos magnéticos se observa una dependencia del ancho de las oscilaciones con el campo magnético.

7. En los estudios en función de la temperatura observamos un desplazamiento de los máximos de las oscilaciones SdH, tanto en función del campo magnético como

de la tensión de puerta. Sin embargo, las mesetas Hall aparecen siempre a los mismos valores.

8. Para interpretar los resultados experimentales hemos calculado las componentes diagonal y no diagonal de la magnetoconductividad transversa. El modelo se basa en la aproximación de electrones independientes y desarrolla ambas magnetoconductividades en serie de potencias de  $1/B$  para altos campos magnéticos.

9. Una vez definidas las características del GE2D (densidad de electrones y masa efectiva), el modelo tiene como parámetros ajustables el ancho de los niveles de Landau y un tiempo de vida relacionado con el transporte. Aunque la posición de las mesetas de la magnetoconductividad no diagonal aparecen siempre a  $-ne^2/h$ , el ancho de las mesetas y la amplitud de las oscilaciones dependen de los dos parámetros del modelo. En la memoria mostramos ajustes de los resultados experimentales con el modelo, [Parte VII].

10. En el modelo interpretamos las mesetas de efecto Hall cuántico como una fluctuación de la densidad de electrones del GE2D alrededor de su valor a campo cero,  $n_0$ .

11. Los S2D reales que presentan efecto Hall cuántico tienen un entorno físico que sirve de *reserva* de electrones para la fluctuación de la densidad de electrones. Esto implica que en un S2D ideal no existe efecto Hall cuántico.

12. Hemos hecho extensiones del modelo:

1. A propiedades de equilibrio como la imanación, el calor específico y la magnetocapacidad del GE2D,
2. Al efecto Hall cuántico fraccionario,
3. A los sistemas *cuasi*-unidimensionales.



# APÉNDICE 1

## DENSIDAD DE ESTADOS EN SISTEMAS 1D, 2D Y 3D

En este Apéndice nos proponemos deducir las expresiones para las densidades de estado correspondientes a sistemas físicos de diferente dimensionalidad. Supondremos que no existen campos externos aplicados y que es válida la aproximación de masa efectiva, [Apéndice 2], aproximación que supone la siguiente relación de dispersión para la energía de un electrón en el cristal

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2 \vec{k}_i^2}{2m^*} \quad [1]$$

donde  $n=1,2,3$  dependiendo de las dimensiones del sistema. Estamos igualmente asumiendo que el tensor de masa efectiva es isótropo, [Apéndice 2].

Los sistemas 1D, 2D y 3D se diferencian en el tipo de confinamiento que sufren los electrones en el espacio  $\vec{k}$ . En el caso de S1D el número de estados por unidad de longitud del espacio  $\vec{k}$  es  $L/2\pi$ , siendo  $L$  la longitud del S1D. Así, en el caso unidimensional la densidad de estados vendrá dada por la ecuación siguiente

$$g(k)dk = \left(\frac{L}{2\pi}\right)dk$$

Haciendo uso de la relación [1] obtenemos:

$$dk = \frac{(2m^*)^{\frac{1}{2}} \pi}{\hbar E^{\frac{1}{2}}} dE$$

y, por tanto, la densidad de estados expresada en función de la energía y por unidad de área estará dada por

$$g(E) = \frac{m^{*\frac{1}{2}}}{\hbar(2E)^{\frac{1}{2}}} \quad [2]$$

que aparece representada en la [Fig. 1(a)].

En el caso de un sistema bidimensional el número de estados por unidad de área del espacio  $\vec{k}$  es  $(L/2\pi)^2$ , y un círculo de radio  $k$  centrado en el origen del espacio  $\vec{k}$  es una línea de energía constante. El área encerrada entre este círculo y un círculo concéntrico con el anterior de radio  $k+dk$  es  $2\pi kdk$ . Así, el número de estados contenidos en este anillo será

$$g(k)dk = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi k dk$$

Puesto que  $E$  es una función del vector  $k$  tenemos que considerar la expresión del diferencial de la energía, dada por

$$dE = \nabla_{\vec{k}} E \cdot d\vec{k}$$

Pero el gradiente de la energía representa una función dirigida a lo largo del radio vector  $\vec{k}$ . Por tanto, tenemos que la densidad de estados por unidad de área es

$$g(E) = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \quad [3]$$

representada en la [Fig.1(b)], y que es constante en energía. Ni en la [Ec.2] ni en la [Ec.3] se ha tenido en consideración la degeneración de espín que contribuiría en ambas ecuaciones con un factor 2 en el numerador.

El caso de los sistemas tridimensionales es más usual en la bibliografía. Extendiendo las ideas desarrolladas para los S2D, en este caso consideraremos esferas concéntricas de radios  $k$  y  $k+dk$ , respectivamente, centradas en el origen del espacio  $\vec{k}$ . El volumen determinado por estas dos esferas será  $4\pi k^2 dk$ , de manera que el número de estados contenidos entre ambas vendrá dado por

$$g(k)dk = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk$$

de donde, igual que en el caso de los S2D, obtenemos

$$g(E) = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$$

que aparece representada en la [Fig.1(c)].

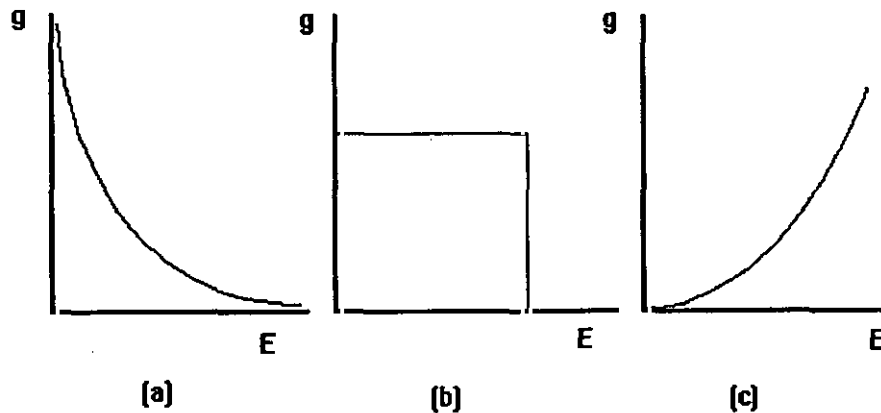


Figura 1: (a) Densidad de estados para un S1D. (b) Densidad de estados para un S2D. (c) Densidad de estados de un S3D.

Como analizamos en la [Parte I], los potenciales de confinamiento pueden dar lugar a más de un S2D. De modo que la densidad de estados para dos subbandas es de la forma

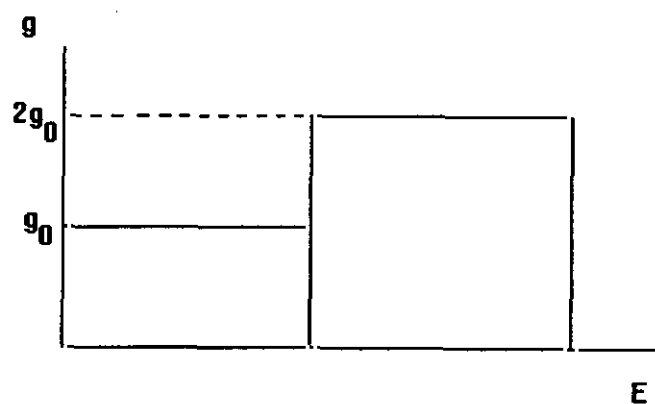


Figura 2: Densidad de estados para un S2D.



## APÉNDICE 2

### ESTADOS DE ENERGÍA EN SÓLIDOS

#### 2.1. ELECTRONES EXTENDIDOS

La ecuación de Schrödinger del electrón en la red cristalina perfecta viene dada por la siguiente expresión

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - E_\alpha(\vec{k}) \right] \psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = \left[ H_p(\vec{r}) - E_\alpha(\vec{k}) \right] \psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = 0 \quad [1]$$

donde  $V(\vec{r})$  es el potencial de la red cristalina que posee la simetría de la misma, es decir

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{R}_n) \quad [2]$$

siendo  $\vec{R}_n$  un vector de traslación de la red. Los estados estacionarios de un electrón de masa  $m$  en dicho campo se llaman estados monoelectrónicos. Habría que afirmar que estos estados son *cuasi*-estacionarios ya que la interacción con el movimiento de los iones, con el resto de electrones y con los defectos estructurales originan procesos de relajación. Sin embargo, a bajas temperaturas y en cristales puros el tiempo de vida condicionado por estos procesos de relajación es muy grande y, en primera aproximación, podemos despreciarlos. Las autofunciones de esta ecuación de Schrödinger lo son igualmente del operador de traslación de la red y son de la forma siguiente

$$\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = |\alpha\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) \quad [3]$$

que satisface la condición de Bloch

$$\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}_n) = \exp\{i\vec{k} \cdot \vec{R}_n\} \psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r})$$

La amplitud de la función de Bloch presenta la periodicidad de la red, es decir

$$u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}_n) \quad [4]$$

$V=Nv$  es el volumen del cristal, que contiene  $N$  celdillas elementales de volumen  $v$ . Estas funciones, representan ondas planas moduladas. Estas funciones, que se conocen con el nombre de *funciones de Bloch*, son estados de energía  $E_\alpha(\vec{k})$  y de *cuasi*-impulso  $\hbar\vec{k}$ , que recorre  $N$  valores discretos para cada valor de  $\alpha$ , y representan estados extendidos o deslocalizados puesto que verifican la relación

$$|\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r})|^2 = |\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r} + \vec{n})|^2$$

relación que implica la existencia de orden de largo alcance. Por otro lado, estas funciones están normalizadas con la condición

$$\begin{aligned} \int \psi_{\alpha, \vec{k}}^*(\vec{r}) \psi_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}) d^3\vec{r} &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}, \\ \frac{1}{v} \int u_{\alpha, \vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}) d^3\vec{r} &= \delta_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad [5]$$

Sustituyendo la expresión general de las funciones de Bloch en la [Ec.1], obtenemos la ecuación para las amplitudes

$$H_u(\vec{r}) u_{\alpha, \vec{k}} = \left[ \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k})^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}) = E_{\alpha}(\vec{k}) u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}) \quad [6]$$

Si tenemos en cuenta la interacción espín-órbita, que es de la forma

$$H_{s-o} = -\frac{e\hbar}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot [\vec{E}^u \times \vec{p}]$$

donde  $\vec{\sigma}$  es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y  $\vec{E}^u = -\nabla U(\vec{r})/e$  es el campo eléctrico al que está sometido el electrón. De esta forma obtenemos la ecuación de Pauli para la función  $u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r})$ , [Davidov,81], [Kittel,87]

$$\left[ \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k})^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{\hbar}{4m^2} [\vec{\sigma} \times \nabla_{\vec{r}} U(\vec{r})] (\vec{p} + \hbar \vec{k}) - E_{\alpha}(\vec{k}) \right] u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}) = 0$$

donde  $u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r})$  depende ahora del espín del electrón. En lo que sigue despreciaremos este término de interacción espín-órbita.

Al ser  $u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r})$  una función periódica con periodo de la red, las ecuaciones pueden considerarse solamente en una celdilla unidad introduciendo las condiciones de periodicidad en su superficie. Además, esto nos permite desarrollarla en un sistema de funciones ortonormalizado completo en el volumen de la celdilla unidad  $v$ , cuya expresión general es

$$\varphi_{\vec{g}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\{i\vec{g} \cdot \vec{r}\}$$

siendo  $\vec{g}$  un vector de la red recíproca. Es inmediato comprobar el carácter ortonormal de las funciones anteriores ya que

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \int \exp\{i(\vec{g} - \vec{g}') \cdot \vec{r}\} d^3\vec{r} = \delta_{\vec{g}\vec{g}'}$$

Así, el desarrollo de Fourier de  $u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r})$  viene dado por

$$u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{g}} A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g}) \exp\{i\vec{g} \cdot \vec{r}\}$$

Sustituyendo el desarrollo anterior en la [Ec.6], obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left[ \frac{\hbar^2(\vec{k} + \vec{g})^2}{2m} - E_{\alpha}(\vec{k}) \right] A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g}) = - \sum_{\vec{g}'} \langle \varphi_{\vec{g}} / V(\vec{r}) / \varphi_{\vec{g}'} \rangle A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g}')$$

siendo

$$\langle \varphi_{\vec{g}} / V(\vec{r}) / \varphi_{\vec{g}'} \rangle = \frac{1}{V} \int V(\vec{r}) \exp\{i(\vec{g}' - \vec{g}) \cdot \vec{r}\} d^3\vec{r}$$

Si  $V(\vec{r})$  es suave, en el segundo miembro de la ecuación anterior serán importantes varios sumandos para los cuales  $\vec{g}$  difiere poco de  $\vec{g}'$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones podemos determinar el valor medio cualquier otra magnitud física. Así, encontramos que la energía está dada por

$$E_{\alpha}(\vec{k}) \equiv \langle \alpha\vec{k} / H_u / \alpha\vec{k} \rangle = \sum_{\vec{g}} \frac{\hbar^2(\vec{k} + \vec{g})^2}{2m} |A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g})|^2 + \sum_{\vec{g}, \vec{g}'} A_{\alpha\vec{k}}^*(\vec{g}) \langle \varphi_{\vec{g}} / V(\vec{r}) / \varphi_{\vec{g}'} \rangle A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g}') \quad [7]$$

y para la velocidad media se encuentra

$$\bar{v}_{\alpha}(\vec{k}) \equiv \langle \alpha\vec{k} / \frac{\vec{p}}{m} / \alpha\vec{k} \rangle = \sum_{\vec{g}} \frac{\hbar}{m} (\vec{k} + \vec{g}) |A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g})|^2$$

que si no se tiene en cuenta la pequeña dependencia de la amplitud  $A_{\alpha\vec{k}}$  respecto del vector de onda  $\vec{k}$ , comparando las expresiones anteriores para la energía y la velocidad media, podemos simplificar a la ecuación

$$\bar{v}_{\alpha}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k})$$

Hagamos un estudio de la energía para una banda, es decir, para un valor determinado de  $\alpha$ . Supongamos que tiene su valor extremo cuando  $\vec{k} = \vec{k}_0$ . Introduciendo el vector  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ , si los valores de  $\vec{q}$  son pequeños, podemos sustituir la ecuación general anterior para la energía por la expresión reducida

$$E_{\alpha}(\vec{k}_0 + \vec{q}) = E_{\alpha}(\vec{k}_0) + \sum_{i,j} \frac{\hbar^2 q_i q_j}{2m_{ij}^*} \quad [8]$$

donde

$$\frac{m}{m_{ij}^*} \equiv \frac{m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial^2 E_{\alpha}(\vec{k})}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \approx \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{g}} \left[ \left( g_i \frac{\partial}{\partial q_j} + g_j \frac{\partial}{\partial q_i} \right) |A_{\alpha\vec{k}}(\vec{g})|^2 \right]_0 \quad [9]$$

El término  $1/m_j^*$  del denominador de la [Ec.8] es el tensor de masa efectiva del electrón en la correspondiente banda de energía. El segundo sumando de la ecuación anterior tiene en cuenta la variación de la masa del electrón libre debida a la acción del potencial periódico de la red. Si la banda es isótropa, que es el caso que nos interesa para nuestro análisis del EHC, el tensor de masa efectiva se reduce a un escalar.

## 2.2. APROXIMACIÓN DE LA MASA EFECTIVA

El hamiltoniano de la [Ec.1]

$$H_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) \quad [10]$$

donde el operador  $\nabla_r$  viene dado por la ecuación

$$\nabla_r = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad [11]$$

tiene para pequeños valores de  $\vec{k}$  ( $\vec{k}_0 = 0$ ) autovalores dados por la [Ec.8] y autofunciones representados de forma general por la [Ec.3]. Los mismos autovalores posee el hamiltoniano efectivo

$$H_{efectivo} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_r^2 + E_0 \quad [12]$$

suponiendo una masa efectiva escalar, y donde  $E_0$  es el valor de la energía para el vector de onda  $\vec{k} = 0$ . Sin embargo, las autofunciones son ondas planas de la forma

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\{i\vec{k} \cdot \vec{r}\} \quad [13]$$

Esto quiere decir que cuando se estudian los estados electrónicos de onda larga, la influencia del potencial periódico de la red puede tenerse en consideración sustituyendo en el hamiltoniano total la masa del electrón por la masa efectiva. Si sobre el cristal, además, actúa un campo externo que varía de forma suave,  $U(\vec{r})$ , al estudiar los estados de onda larga, también puede reducirse la influencia del campo periódico de la red cambiando la masa del electrón libre por su masa efectiva. Es decir, puede efectuarse la sustitución

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) + U(\vec{r}) \Rightarrow H_{efectivo} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_r^2 + U(\vec{r}) + E_0 \quad [14]$$

Esta transformación se conoce con el nombre de *aproximación de la masa efectiva*.



### 2.3. APROXIMACIÓN $\vec{k} \cdot \vec{p}$

En una zona extremal de la relación de dispersión  $E_\alpha(\vec{k})$  podemos calcular el tensor de la masa efectiva del electrón. Supongamos que el extremo de esta relación de dispersión se encuentra en el valor  $\vec{k}_0 = 0$ . Entonces la ecuación de Schrödinger podemos reducirla a la expresión

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \varepsilon_\alpha(\vec{k}) \right] u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = -\frac{\hbar}{m} (\vec{k} \cdot \vec{p}) u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) \quad [15]$$

donde

$$\varepsilon_\alpha(\vec{k}) = E_\alpha(\vec{k}) - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

Si los valores del vector de onda  $\vec{k}$  son pequeños, el segundo miembro de la [Ec.15] se puede considerar como una perturbación pequeña. Supongamos que conocemos la solución de la ecuación sin este segundo miembro dentro de una celdilla elemental

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \varepsilon_\alpha^0 \right] u_\alpha^0 = 0$$

Si el nivel  $\varepsilon_\alpha^0$  no es degenerado, usando la teoría de perturbaciones en primer orden de aproximación, tenemos como solución

$$u_{\alpha\vec{k}} = u_\alpha^0 - \frac{\hbar}{m} \sum_{i,\alpha'} \frac{k_i u_{\alpha'}^0 \langle u_{\alpha'}^0 / p_i / u_\alpha^0 \rangle}{\varepsilon_{\alpha'}^0 - \varepsilon_\alpha^0} \quad [16]$$

donde la suma se extiende a todos los valores de  $i=x, y, z$  y a todos los estados  $\alpha' (\neq \alpha)$ . Si suponemos que el sistema tiene centro de simetría los elementos diagonales de la matriz  $\langle u_\alpha^0 / p_i / u_\alpha^0 \rangle$  son iguales a cero. Tomando los términos hasta segundo orden respecto de  $\vec{k}$ , obtenemos para las bandas de energía del estado  $\alpha$ , [Davidov,81]

$$E_\alpha(\vec{k}) = \varepsilon_\alpha^0 + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_{i,j,\alpha'} \frac{k_i k_j \langle u_\alpha^0 / p_j / u_{\alpha'}^0 \rangle \langle u_{\alpha'}^0 / p_i / u_\alpha^0 \rangle}{\varepsilon_{\alpha'}^0 - \varepsilon_\alpha^0} \quad [17]$$

Comparando esta ecuación con la [Ec.8], obtenemos la siguiente expresión para el tensor de masa efectiva

$$\frac{m}{m_{ij}^*} = \delta_{ij} + \frac{2}{m} \sum_{\alpha'} \frac{\langle u_\alpha^0 / p_j / u_{\alpha'}^0 \rangle \langle u_{\alpha'}^0 / p_i / u_\alpha^0 \rangle}{\varepsilon_{\alpha'}^0 - \varepsilon_\alpha^0} \quad [18]$$



## APÉNDICE 3

### EFFECTO DE LAS IMPUREZAS SOBRE UN NIVEL DE LANDAU

Supongamos que existe una perturbación en torno a un punto espacial  $\vec{r}_i$  que podemos caracterizar por una energía potencial local  $U(\vec{r} - \vec{r}_i)$ .

La ecuación de Schrödinger que define los estados estacionarios del electrón en el cristal bajo la aplicación del campo magnético, teniendo en consideración la perturbación local quedará de la forma

$$[H_B + U(\vec{r} - \vec{r}_i) - E]\Psi(\vec{r}) = 0$$

donde  $H_B$  es el hamiltoniano del electrón en el cristal perfecto sometido al campo magnético, [Parte III], en el que supondremos válida la aproximación de masa efectiva, [Apéndice 8], y cuyos autovalores corresponden a los niveles de Landau

$$E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$$

Suponiendo que la perturbación local no es demasiado grande, podemos utilizar la teoría de perturbaciones para espectros degenerados de la Mecánica Cuántica [Landau, 83, 1], [Yndurain, 88], y desarrollar la solución en función de las autofunciones del hamiltoniano  $H_B$ .

Así, tenemos como solución general del hamiltoniano perturbado la ecuación

$$\Psi_{n,m}^{\lambda}(\vec{r}') = \sum_m a_m \psi_{n,m}(\vec{r}')$$

el índice  $\lambda$  recorre el conjunto de estados del correspondiente nivel de Landau cuya degeneración ha sido rota por la perturbación. Por otro lado, las funciones base del desarrollo vienen dadas por

$$\psi_{n,m}(\vec{r}') = A_{n,m} (x' - iy')^m \exp\left(-\frac{r'^2}{4}\right) L_n^m\left(\frac{r'^2}{2}\right)$$

con  $x' = x/R$  y  $y' = y/R$ , y  $R$  la longitud magnética cuya expresión está dada por la [Ec. III.12],  $L_n^m$  son los polinomios de Laguerre. Con el subíndice  $m$  describimos los autovalores del momento angular orbital del electrón de cada nivel de Landau. El resto de factores corresponden a

$$A_{n,m} = \left[ 2^m \frac{(m+n)!}{n!} \right]$$

y

$$r'^2 = x'^2 + y'^2$$

De manera que los autovalores del hamiltoniano perturbado estarán determinados por la expresión

$$E_n^\lambda = E_n + E_{n,m}$$

con

$$E_{n,m} = \langle \psi_{n,m} | U(\vec{r} - \vec{r}_i) | \psi_{n,m} \rangle$$

y donde con el índice  $\lambda$  identificamos cada uno de los nuevos estados energéticos surgidos a consecuencia de la perturbación.

## APÉNDICE 4

### ECUACIÓN DE BOLTZMAN. APROXIMACIÓN $\tau$

Si aplicamos a un cristal un campo exterior o un gradiente de temperaturas, el sistema de electrones se describirá por una función de distribución de desequilibrio, que depende de la energía de las partículas, de sus coordenadas y del tiempo,  $f(\vec{r}, \vec{k}, t)$ . En el espacio fásico del cristal de volumen unitario se considera un elemento de volumen  $d\Gamma$  igual a, [Huang, 87]:

$$d\Gamma = d^2\vec{r}d^2\vec{p} = \hbar^2 d^2\vec{r}d^2\vec{k}$$

En este elemento existen  $d\Gamma/\hbar^2$  celdas, en cada una de las cuales puede haber dos electrones con espines en direcciones opuestas, de manera que tenemos  $2d\Gamma/\hbar^2$  estados cuánticos. Si la función de distribución representa la probabilidad de que el electrón se encuentre en cada uno de estos estados, el número total de electrones en ese elemento del espacio fásico en un instante determinado  $t$  vendrá dado por

$$dn = \frac{2f(\vec{r}, \vec{k}, t)d\Gamma}{\hbar^2} = f(\vec{r}, \vec{k}, t)d^2\vec{r} \frac{d^2\vec{k}}{2\pi^2}$$

El paso siguiente será el deducir una ecuación que nos permita determinar la función de distribución. Para ello dividiremos el análisis en dos partes. En la primera estudiaremos el movimiento de los portadores en el espacio ordinario y, posteriormente, en el espacio del vector de onda.

La expresión que se deduce para la variación del número de electrones con velocidad  $\vec{v}$  en un elemento de volumen del cristal  $d^2\vec{r}$  durante el instante de tiempo  $dt$ , viene dada por

$$-(\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f_{\vec{k}}) d^2\vec{r} \frac{d^2\vec{k}}{2\pi^2} dt$$

Esta variación se debe a los procesos de transporte que tienen lugar bajo la influencia de la difusión de electrones por posibles gradientes de temperatura o de concentración que tienen lugar en el material.

Para el caso del comportamiento en el espacio del vector de onda, la variación del número de electrones en un elemento de volumen del espacio recíproco debido al movimiento de los mismos es

$$-\frac{1}{\hbar} (\vec{F} \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}}) d^2\vec{r} \frac{d^2\vec{k}}{2\pi^2} dt$$

donde  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  es la fuerza que actúa sobre el electrón en el punto  $\vec{r}$  y en el instante  $t$ . Luego, la ecuación anterior expresa la variación del número de portadores en el correspondiente elemento de volumen del espacio recíproco debido a la acción de una fuerza exterior, asociada a campos eléctricos y magnéticos.

Los electrones en un elemento de volumen del espacio de las fases  $d\Gamma$  pueden cambiar a causa de la interacción con las perturbaciones locales de la periodicidad cristalina. El tiempo de interacción con los defectos estructurales es del orden de  $10^{-14}$  seg. Esta interacción tan breve no puede dar lugar a un cambio grande en la coordenada espacial, pero sí alterar apreciablemente la velocidad y el *cuasi*-impulso del electrón. Al producirse la colisión, el electrón pasa de estar en un estado  $(\vec{r}, \vec{k})$  a otro  $(\vec{r}', \vec{k}')$ . Como la coordenada espacial no sufre cambio, la probabilidad de transición en la unidad de tiempo no dependerá del vector posición, y lo representaremos por  $W(\vec{k}, \vec{k}')$ . Así, tendremos en consideración la variación de la función de distribución en el tiempo debido a las colisiones con un término de la forma, [Ziman, 79]:

$$\int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') [f_{\vec{k}'} - f_{\vec{k}}] \frac{d^2 \vec{k}'}{2\pi^2}$$

donde la integración se extiende a todo el volumen de la primera zona de Brillouin y se ha hecho uso del principio de reversibilidad microscópica

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$$

Reagrupando todos los términos anteriores, obtenemos la ecuación de Boltzman

$$\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} = -\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f_{\vec{k}} - \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} f_{\vec{k}} + \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') [f_{\vec{k}'} - f_{\vec{k}}] \frac{d^2 \vec{k}'}{2\pi^2}$$

Para procesos estacionarios, cuando las magnitudes que describen los fenómenos de transporte no dependen del tiempo, el primer término de la ecuación anterior se hace cero. Entonces, se puede decir que en el estado estacionario la variación de la función de distribución causada por la acción de los campos exteriores sobre el movimiento del electrón está compensada por sus colisiones con las perturbaciones locales de la periodicidad del campo de la red. A lo largo de la memoria no vamos a estar interesados en el término difusivo puesto que siempre trabajaremos en condiciones para las que no existen ni gradientes de temperatura ni gradientes de concentración de electrones a lo largo del S2D.

La ecuación de Boltzman es semiclásica ya que en la función de distribución aparecen simultáneamente la coordenada y el vector de onda. Esto implica que sólo es aplicable a los procesos

para los que tiene sentido la noción de longitud de recorrido libre, es decir, siempre y cuando esta longitud sea mayor que la longitud de onda del electrón en el cristal.

Un punto importante para la resolución de la ecuación es la obtención del tiempo de relajación. La descripción de los procesos de dispersión mediante un tiempo de relajación es posible si al colisionar se altera poco la energía de los electrones y si los procesos de dispersión dan lugar a una distribución aleatoria de las velocidades. Supongamos que en el instante inicial, descrito por la función de distribución de desequilibrio  $f$ , en el sistema han dejado de actuar las perturbaciones exteriores y el término de campo tiende a cero, de modo que la función de distribución se modifica únicamente por las colisiones de los electrones con los defectos de la red. Así, nos queda

$$\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} = \left( \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} \right)_{\text{colisiones}}$$

Supongamos que la desviación de la distribución de electrones respecto del estado de equilibrio es pequeña.

Ahora, supongamos que la velocidad de variación de  $f$  debida a las colisiones es proporcional a la magnitud de su desviación respecto de la de equilibrio, es decir, proporcional a  $f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0$ :

$$\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} = -\frac{f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0}{\tau(\vec{k})}$$

cuya solución está dada por la ecuación

$$f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0 = (f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^0)_{t=0} \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$$

$\tau$  es el tiempo de relajación y es un tiempo medio durante el que una vez que se han desconectado los campos exteriores, el sistema tiene una distribución de desequilibrio de electrones. Puesto que los campos no llevan a grandes variaciones de la función de distribución de equilibrio,  $f$  puede expresarse como

$$f_{\vec{k}} = f_{\vec{k}}^0 + f_{\vec{k}}^1$$

donde el segundo término representa la corrección a la función de distribución de equilibrio debido a la acción de los campos exteriores aplicados sobre el sistema. Función que expresaremos por conveniencia a través de la ecuación

$$f_{\vec{k}}^1 = \vec{k} \cdot \vec{\chi}(E) \left( -\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E} \right)$$

y cuya correspondencia con la [Ec.II.14] es la siguiente

$$\vec{k} \cdot \vec{\chi}(E) \rightarrow -e\tau\vec{v}(\vec{k}) \cdot \vec{A}$$

Supongamos que el tiempo de relajación no depende de los campos exteriores. Esto significa que  $\tau(\vec{k})$  también determina los procesos de dispersión en presencia de campos exteriores. Entonces

$$\vec{v}\nabla_{\vec{r}}f_{\vec{k}} + \frac{1}{\hbar}\nabla_{\vec{k}}f_{\vec{k}} = -\frac{f_{\vec{k}}^1}{\tau(\vec{k})}$$

de donde obtenemos

$$\left(\frac{\mathcal{J}_{\vec{k}}}{\partial}\right)_{\text{colisiones}} = \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') [f_{\vec{k}'}^1 - f_{\vec{k}}^1] \frac{d^2\vec{k}'}{2\pi^2}$$

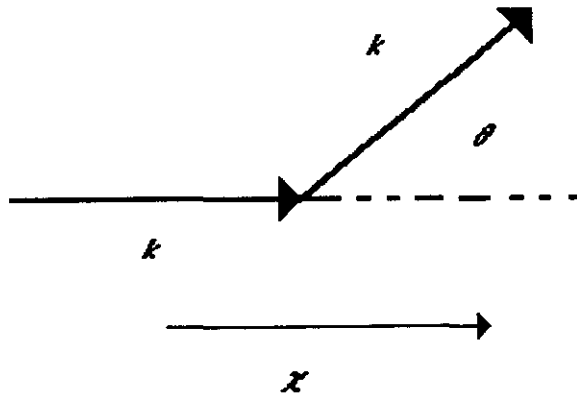
De las dos ecuaciones anteriores deducimos que el tiempo de relajación es

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = -\int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') \left[ \frac{f_{\vec{k}'}^1 - f_{\vec{k}}^1}{f_{\vec{k}}^1} \right] \frac{d^2\vec{k}'}{2\pi^2} = \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') \left[ 1 - \frac{\frac{\partial \mathcal{J}_{\vec{k}'}^0}{\partial E'} \vec{k}' \cdot \vec{\chi}(E')}{\frac{\partial \mathcal{J}_{\vec{k}}^0}{\partial E} \vec{k} \cdot \vec{\chi}(E)} \right] \frac{d^2\vec{k}'}{2\pi^2}$$

Las colisiones pueden ser elásticas o inelásticas. Vamos a suponer que las colisiones de los electrones con defectos estructurales son elásticas, es decir, sólo se modifica la dirección del vector de onda y, por tanto, la dirección de la velocidad de movimiento del electrón. Entonces  $k=k'$  lo que implica que  $v=v'$  y, si las bandas son parabólicas,  $E=E'$ . En este caso, el tiempo de relajación es

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') \left[ 1 - \frac{\vec{k}' \cdot \vec{\chi}(E)}{\vec{k} \cdot \vec{\chi}(E)} \right] \frac{d^2\vec{k}'}{2\pi^2}$$

Supongamos ahora que los vectores  $\vec{k}$ ,  $\vec{\chi}$  y  $\vec{k}'$  están dirigidos del modo indicado en la siguiente figura



Esto nos permite reducir la ecuación anterior a

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - \cos\theta] \frac{d^2\vec{k}'}{2\pi^2}$$



Luego, si se conoce el mecanismo de dispersión de los electrones se puede conocer el tiempo de relajación.

Consideremos el caso inelástico. Se puede demostrar que en este caso se tiene, [Shalíмова, 75]:

$$\left( \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} \right)_{\text{colisiones}} = - \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') f_{\vec{k}'} \frac{d^2 \vec{k}'}{2\pi^2}$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \int_{\nu_s} W(\vec{k}, \vec{k}') \frac{d^2 \vec{k}'}{2\pi^2}$$



## APÉNDICE 5

### FÓRMULA EXTENDIDA DE LA SUMA DE POISSON

Sea  $g(x)$  una función arbitraria. En el intervalo  $n < x < n+1$  podemos escribir

$$g(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_p \exp\{-2\pi p x i\}$$

donde

$$g_p = \int_n^{n+1} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx$$

que no es más que un desarrollo en serie de Fourier de la función  $g(x)$ . Así, podemos escribir

$$g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_p \exp\left\{-2\pi p \left(n + \frac{1}{2}\right) i\right\}$$

que, operando, se convierte en

$$g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \int_n^{n+1} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx$$

Sumando ahora sobre todos los intervalos posibles de la variable  $x$ , tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + \sum_{p=-1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx \quad [1]$$

donde el último término puede escribirse como

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{-2\pi p x i\} dx = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(-x) \exp\{2\pi p x i\} dx$$

en el que efectuamos un cambio de variable para establecer la segunda igualdad. Así, si hacemos que el desarrollo de Fourier de la función sea par, tenemos que este término se hace idéntico al primero de la [Ec.1]. De modo que, reagrupando obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx$$

Para el caso de magnitudes físicas reales debemos tomar únicamente la parte real de esta expresión, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi p x i\} dx \right\}$$

expresión que llamaremos *fórmula extendida de la suma de Poisson*.



# APÉNDICE 6

## TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en toda la recta real. Entonces, la función

$$c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$$

se llama convolución de estas dos funciones y se denota por  $f * g$ . La función  $c(x)$  está definida para todo valor de  $x$  y es integrable. Calculemos su transformada de Fourier

$$TF[c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} c(x) \exp\{-2\pi\lambda xi\} dx$$

entonces, tenemos

$$TF[c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right] \exp\{-2\pi\lambda xi\} dx$$

donde, reagrupando términos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi) \exp\{-2\pi\lambda xi\} dx \right] d\xi$$

Haciendo un cambio de variables, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \exp\{-2\pi\lambda \eta i\} \exp\{-2\pi\lambda \xi i\} d\eta \right] d\xi$$

que puede simplificarse a la expresión

$$TF[c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\{-2\pi\lambda \xi i\} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \exp\{-2\pi\lambda \eta i\} d\eta$$

Esta ecuación representa el *teorema de convolución* que expresaremos de forma compacta como

$$TF\{f * g\} = TF\{f\} \cdot TF\{g\}$$

Así, la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas de Fourier, [Kolmogórov,78]. Este resultado será de gran utilidad en nuestro estudio del EHC y SdH a la hora de incluir los efectos térmicos, de colisiones y de espín en las diferentes magnitudes físicas.



# APÉNDICE 7

## SIMULACIÓN DEL EHCF

En este Apéndice simularemos el espectro energético del EHCF para los niveles de Landau fraccionarios correspondientes a todos los armónicos de  $1/3$ . Consideremos el primer nivel de Landau,  $n=0$ , [Ec.VIII.5]. Así, que los posibles estados energéticos estarán dados por la ecuación

$$E_{i,j} = \frac{\hbar\omega_c}{j} i \quad [1]$$

Utilizando la fórmula extendida de la suma de Poisson, [Apéndice 5], desarrollada considerando la variable continua en el intervalo  $n-1 < x < n+1$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{2\pi x p i\} dx \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} TF[g(x)] \right\}$$

y donde con  $TF[g(x)]$  representamos la transformada de Fourier del término general de la densidad de estados, obtenemos

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \frac{jE}{\hbar\omega_c} \right] \right\} \quad [2]$$

donde hemos tomado para cada nivel de Landau fraccionario de índices  $i,j$  (siendo  $j$  fijo), la expresión

$$g(E_{n,m}) = g_0 \delta \left( x - \frac{jE}{\hbar\omega_c} \right) \quad [3]$$

Luego, la densidad de estados correspondiente a los niveles  $i/j$ , considerando los términos del hamiltoniano correspondientes al espín,  $H_s$ , al acoplamiento espín-órbita,  $H_{s-o}$ , y de ensanchamiento debido a los defectos estructurales e impurezas, estará dada por

$$g(E) = g_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} A_{s,p} A_{r,p} \cos[X] \right\} \quad [4]$$

con

$$X = 2\pi p \frac{jE}{\hbar\omega_c} \quad [5]$$

y donde para el cálculo del factor  $A_{s,p}$  ya hemos tenido en consideración el acoplamiento espín-órbita.

De la densidad de estados es inmediato obtener el número de electrones del GE2D haciendo uso de la [Ec.4]. Así, para el caso que estamos considerando en el que  $j$  está fijo, queda

$$n = n_0 + \delta n = n_0 + \frac{2eB}{hj} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi p} A_{s,p} A_{\Gamma,p} A_{T,p} \sin[X_F] \quad [6]$$

donde

$$X_F = 2\pi p \frac{jE_F}{\hbar\omega_c} \quad [7]$$

De esta expresión podemos calcular de forma inmediata la magnetoconductividad Hall a partir de la ecuación, [Ec.IV.13]:

$$\sigma_{xy} = -\frac{e}{B} (n_0 + \delta n)$$

En la siguiente figura representamos esta magnetoconductividad para el caso de que aparezcan niveles fraccionarios correspondientes a los armónicos de 1/3

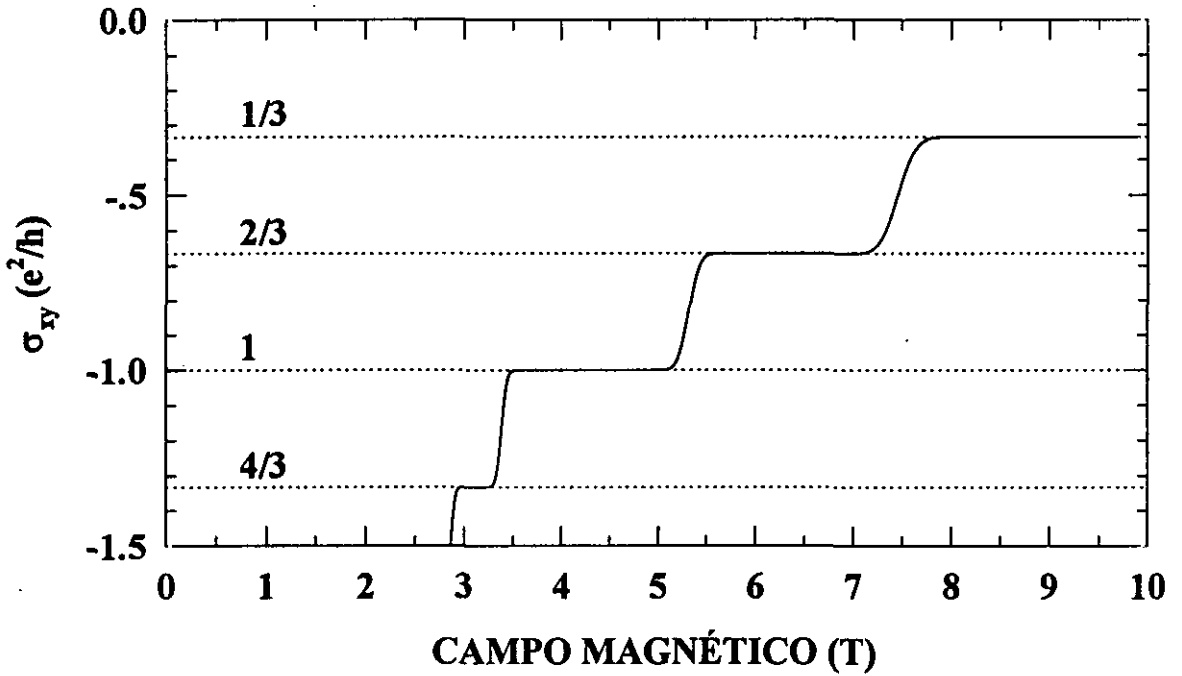


Figura 1: Simulación de la magnetoconductividad Hall para las mesetas correspondientes a los armónicos de 1/3. Las condiciones son las siguientes:  $n_0=1 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ,  $T=0.01 \text{ K}$ ,  $\Gamma=1 \text{ meV}$ .

Como vemos aparecen mesetas a valores fraccionarios correspondientes a los armónicos de 1/3.



## APÉNDICE 8

### HAMILTONIANO DE UN SISTEMA CUASI-BIDIMENSIONAL

La ecuación de Schrödinger en presencia de un campo magnético y dos campos eléctricos constantes y uniformes,[Fig.3] es de la forma

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad [1]$$

siendo

$$H_{total} = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) + H_e + U(\vec{r}) + H_{e-o} + H_{da} + e\phi + H_{e-e} \quad [2]$$

donde hemos hecho uso del *principio de correspondencia* y el *postulado de sustitución mínima*. Pasemos a describir el significado y la forma de cada uno de los términos del hamiltoniano:

1)El término cinético,  $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A}$ , con  $\vec{p} = -i\hbar\nabla_r$  y  $\vec{A}$  el potencial vector, representa el análogo cuántico de la relación clásica entre la velocidad de un electrón y su momento lineal en presencia de un campo magnético, [Jackson,75]. El potencial vector está relacionado con éste a través de la expresión clásica

$$\vec{B} = \nabla_r \times \vec{A} \quad [3]$$

donde el operador gradiente está definido en las variables espaciales

$$\nabla_r = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

De la definición de campo magnético observamos una falta de unicidad en la elección del potencial vector que puede determinarse salvo el gradiente de una función escalar arbitraria. Así, si llamamos  $f$  a esta función, puede demostrarse que se cumple la relación

$$\nabla_r \times (\nabla_r f) = 0$$

Desde un punto de vista semiclásico, este término cinético del hamiltoniano corresponde a la fuerza de Lorentz.

2)Con  $V(\vec{r})$  representaremos la energía potencial del electrón debido a su interacción con la red cristalina. Esta verifica la condición de periodicidad dada por la ecuación

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{R}_n) \quad [4]$$

siendo  $\vec{R}_n$  un vector de la red.

3)  $H_s$  es el hamiltoniano de espín, con el que tendremos en cuenta el acoplamiento del espín del electrón con el campo magnético externo. Suponiendo un campo magnético de la forma  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , su expresión general vendrá dada por

$$H_s = -\mu_L B \quad [5]$$

donde  $\mu_L$  es el momento magnético de espín

$$\mu_L = -\frac{g_L \mu_B}{2} \sigma_z \quad [6]$$

y

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [7]$$

es la matriz de Pauli en la dirección  $z$ ,  $\mu_B$  el magnetón de Bohr, igual a  $e\hbar/2m$ , y  $g_L$  el factor giromagnético, igual a 2 para electrones libres, pero que puede tener un valor mucho mayor si el término de acoplamiento espín-órbita se hace importante, [Askerov,94], [Ridley,92], o incluso ser oscilante a altos campos magnéticos debido a la interacción de intercambio, [Isihara,79,1], [Isihara,81,2], [Chudinov,91].

4)  $U(\vec{r})$  es la energía potencial correspondiente al campo eléctrico que en la [Parte I] denominamos campo eléctrico de la unión,  $\vec{E}^u$ , cuyo origen se debe a las impurezas ionizadas comunes a todos los sistemas físicos en los que se presenta EHC. El término correspondiente del hamiltoniano para esta interacción es

$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) = - \sum_i \frac{e^2}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

donde con los vectores  $\vec{r}_i$  localizamos la posición de cada una de las impurezas ionizadas, y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del medio en el que se encuentra el GE2D (en el caso de nuestras muestras  $In_xGa_{1-x}As$ ). Aunque este término del hamiltoniano no es esféricamente simétrico en la región de altos campos magnéticos puede aproximarse por

$$U(\vec{r}) = U_i(r) = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad [8]$$

que representa un potencial esféricamente simétrico y, por tanto, conmuta con el momento angular orbital del electrón dado por la ecuación

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [9]$$

5)  $H_{s-o}$  es el término de acoplamiento espín-órbita que considera la energía de interacción del momento magnético con el campo eléctrico de la unión,  $\vec{E}^u$ ; y que es grande a altos campos magnéticos. Su expresión general está dada por, [Messiah, 75]

$$H_{s-o} = -\frac{e\hbar}{4m^*r} \vec{\sigma} \cdot [\vec{E}^u \times \vec{\pi}] \quad [10]$$

donde  $\vec{\sigma}$  es el vector de Pauli, [Apéndice 2], y  $\vec{\pi}$  el momento lineal generalizado, definido en el punto 1). En relación a la [Ec.8], el carácter esféricamente simétrico de este potencial permite calcular de forma inmediata el campo eléctrico de la unión, que expresaremos de la forma

$$\vec{E}^u = -\frac{1}{e} \frac{dU(r)}{dr} \vec{u}_r \quad [11]$$

siendo  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$  el vector unitario del vector posición en coordenadas cilíndricas. Escrito de esta forma, permite simplificar el término de interacción espín-órbita

$$H_{s-o} = \frac{\hbar}{4m^*r} \vec{\sigma} \cdot [\vec{r} \times \vec{\pi}] \frac{dU(r)}{dr} = \frac{1}{2m^*r} \frac{dU(r)}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L}_s \quad [12]$$

con  $\vec{L}_s = \vec{r} \times \vec{\pi}$  el operador de momento angular orbital generalizado y  $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$  el operador de espín del electrón. El término  $\vec{L}_s$  está dado por

$$\vec{L}_s = (\vec{r} \times \vec{\pi}) = \vec{r} \times (\vec{p} + e\vec{A}) = \vec{r} \times \vec{p} + e\vec{r} \times \vec{A} \quad [13]$$

Usando el *gauge* simétrico, [Ec.23], se reduce a

$$\vec{L}_s = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{e}{2} \vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{L} + \frac{e}{2} \vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r})$$

$\vec{L}$  es el momento angular orbital del electrón, [Ec.9]. Utilizando la identidad vectorial

$$\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{B} - (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} = r^2 \vec{B}$$

y el hecho de que el campo magnético tiene la dirección  $z$  respecto al S2D, obtenemos

$$\vec{L}_s = \vec{L} + \frac{e}{2} r^2 \vec{B} \quad [14]$$

El primer término da origen en el hamiltoniano a un término de segundo orden en  $\hbar$ , es decir, proporcional a  $\hbar^2$ , y podremos prescindir de él en primera aproximación. Considerando que la dirección del momento de espín es la misma que la del campo magnético, la interacción espín-órbita estará descrita

$$H_{s-o} = \frac{e}{4m^*r} \frac{dU(r)}{dr} \vec{S} \cdot \vec{B} = \xi(r) B \quad [15]$$

siendo

$$\xi(r) = \frac{r}{4m^*} \frac{dU(r)}{dr} \mu_B \sigma_z$$

Englobaremos el término de espín y de espín-órbita en uno solo, definiendo un momento magnético generalizado de espín

$$\mu^* = \mu_L + \xi(r) \quad [16]$$

y un factor giromagnético generalizado

$$g^* = g_L + g(r) \quad [17]$$

con

$$g(r) = \frac{r}{2m^*} \frac{dU(r)}{dr} \quad [18]$$

Vemos que la importancia del término de interacción espín-órbita depende del gradiente de energía potencial electrostática correspondiente al campo eléctrico de la unión.

6)  $H_{de}$  es el término debido a la interacción de los electrones con los defectos estructurales del S2D.

7)  $\phi$  es el potencial eléctrico correspondiente al campo eléctrico de transporte,  $\vec{E}^t = -\nabla_{\vec{r}} \phi$ , (véase la [Fig. 4]).

8)  $H_{e-e}$  corresponde al término de interacción electrón-electrón dado por la repulsión coulombiana

$$H_{e-e} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad [19]$$

A pesar de la forma del término cinético, a lo largo de la memoria emplearemos la aproximación de masa efectiva. Esto supone que el potencial de interacción con la red cristalina puede asumirse a una masa efectiva para el electrón. A continuación, demostraremos que incluso para elevados campos magnéticos esta aproximación está justificada.

Como  $\vec{p}$  no conmuta en general con  $\vec{A}$ , que depende de las coordenadas espaciales, el desarrollo del término cinético de la ecuación de Schrödinger queda

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m} (\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \quad [20]$$

Recordando la regla de conmutación del operador momento lineal con una función arbitraria de las coordenadas espaciales, [Landau, 83, 2]:

$$\vec{p} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{p} = -i\hbar (\text{div} \vec{A}) \quad [21]$$

llegamos a que el momento lineal y el potencial vector conmutan si se verifica la relación

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad [22]$$

Esto ocurre para un campo uniforme si se elige su potencial vector de la forma

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B}) \quad [23]$$

conocido con el nombre de *gauge simétrico*. Tomando este potencial vector, el término cinético del hamiltoniano sería

$$(\vec{p} + e\vec{A})^2 = \vec{p}^2 + 2e\vec{A} \cdot \vec{p} + e^2 \vec{A}^2 \quad [24]$$

Consideremos ahora como perturbación el hamiltoniano, [Kittel,87], [Ridley,92]:

$$H' = \frac{e}{2m} (2\vec{A} \cdot \vec{p} + e\vec{A}^2) \quad [25]$$

Esta perturbación es de carácter diferente a la energía potencial de la red cristalina, que lleva a la aproximación de masa efectiva, ya que es una perturbación de la energía cinética. Probando que esta perturbación es pequeña, podemos usar la aproximación de masa efectiva

$$H'_{\text{efectivo}} = \frac{e}{2m^*} (2\vec{A} \cdot \hbar \vec{k} + e\vec{A}^2) \quad [26]$$

Llegando hasta segundo orden en la teoría de perturbaciones, [Landau,83,2], [Yndurain,88], y manteniendo hasta el término cuadrático en el potencial vector, obtenemos

$$E_{\alpha\vec{k}} = E_{\alpha\vec{k}0} + \langle \alpha\vec{k} | H' | \alpha\vec{k} \rangle + \sum_{\alpha'\vec{k}' \neq \alpha\vec{k}} \frac{|\langle \alpha'\vec{k}' | H' | \alpha\vec{k} \rangle|^2}{E_{\alpha\vec{k}} - E_{\alpha'\vec{k}'}} \quad [27]$$

donde los valores medios se efectúan a partir de las funciones de Bloch, [Apéndice 2]

$$\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) u_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = | \alpha\vec{k} \rangle$$

Así, nos quedaría

$$\langle \alpha\vec{k} | H' | \alpha\vec{k} \rangle = \frac{e}{2m} (2\vec{A} \cdot m\vec{v}(\vec{k}) + e\vec{A}^2) = e\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{k}) + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2$$

donde  $\vec{v}(\vec{k})$  representa la velocidad de grupo asociada con el estado  $\vec{k}$  en una banda, [Apéndice 2].

Si suponemos bandas parabólicas la velocidad de grupo tiene la forma:  $\vec{v}(\vec{k}) = \hbar \vec{k} / m^*$ , y la ecuación anterior se reduce a

$$\langle \alpha\vec{k} | H' | \alpha\vec{k} \rangle = \frac{e}{m^*} \vec{A} \cdot \hbar \vec{k} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2$$

El otro término del desarrollo puede aproximarse de la forma

$$\sum_{\alpha'\vec{k}'} \frac{|\langle \alpha' \vec{k}' / H' / \alpha \vec{k} \rangle|^2}{E_{\alpha\vec{k}} - E_{\alpha'\vec{k}'}} \approx \frac{e^2}{m^2} \sum_{\alpha'\vec{k}'} \frac{|\langle \alpha' \vec{k}' / \vec{A} \cdot \vec{p} / \alpha \vec{k} \rangle|^2}{E_{\alpha\vec{k}} - E_{\alpha'\vec{k}'}} = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\alpha'} \frac{|\vec{A} \cdot \langle \alpha' \vec{k} / \vec{p} / \alpha \vec{k} \rangle|^2}{E_{\alpha\vec{k}} - E_{\alpha'\vec{k}}} = \frac{e^2}{2m^*} \left(1 - \frac{m^*}{m}\right) \vec{A}^2$$

Para el segundo paso utilizamos la ortogonalidad de las funciones de Bloch y la suposición de que el potencial vector varía poco a lo largo de la celda unidad, pudiendo tomarse como constante. Por otro lado, para la última igualdad se ha hecho uso de la aproximación  $\vec{k} \cdot \vec{p}$  para una banda esférica cerca del punto de la red recíproca  $\vec{k}=0$ , [Apéndice 2]:

$$\sum_{\alpha'} \frac{|\langle \alpha' \vec{k} / \vec{p} / \alpha \vec{k} \rangle|^2}{E_{\alpha\vec{k}} - E_{\alpha'\vec{k}}} = \frac{m^2}{2m^*} \left(1 - \frac{m^*}{m}\right)$$

Si sustituimos esta solución en la [Ec.27], obtenemos

$$E_{\alpha\vec{k}} = E_{\alpha\vec{k}_0} + \frac{e}{m^*} \vec{A} \cdot \hbar \vec{k} + \frac{e^2}{2m^*} \vec{A}^2 \quad [28]$$

que justifica la aproximación del hamiltoniano efectivo, [Ec.26], siempre y cuando el potencial vector varíe de forma despreciable sobre cada celda unidad.

Para elevados campos magnéticos, utilizando el potencial vector en el *gauge simétrico*, podemos definir la variación del momento lineal asociado al campo magnético en una celda unidad de parámetro  $a$  de la forma  $\Delta p_{\vec{A}} \approx eBa$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que al aplicar un campo magnético elevado, el momento lineal del electrón estará dado aproximadamente por la ecuación  $p \approx \hbar/R$ , siendo  $R$  la longitud magnética, [Ec.III.12], tenemos que para un campo magnético de 15T y un valor del parámetro de la red de 5.6Å, correspondiente al *AsGa*, el cociente entre estas dos magnitudes está dado por

$$\frac{\Delta p_{\vec{A}}}{p} \approx 10^{-2}$$

que nos garantiza la validez de la aproximación de la masa efectiva incluso a altos campos magnéticos.

Un estudio del resto de términos del hamiltoniano [Ec.1] lo efectuamos en la [Parte III], [Parte IV] y [Parte VII].

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Adams,59]: *Quantum Theory of Transverse Galvanomagnetic Phenomena*, Adams E. N., Holdstein T. D., J. Phys. Chem. Solids 10, 254 (1959).
- [Ando,82,1]: *Self-Consistent Results for a GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterojunction. I. Subband Structure and Light-Scattering Spectra*, Ando T., J. Phys. Soc. Jpn. 51, 3893 (1982).
- [Ando,82,2]: *Self-Consistent Results for a GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterojunction. II. Low Temperature Mobility*, Ando T., J. Phys. Soc. Jpn. 51, 3900 (1982).
- [Ando,82,3]: *Electronic Properties of Two-Dimensional Systems*, Ando T., Fowler A. B., Stern F., Rev. Mod. Phys. 54, 437 (1982).
- [Ando,85,4]: *Localization in Strong Magnetic Fields and Quantum Hall Effect*, Ando T., Supplement of the Progress of Theoretical Physics 84, 69 (1985).
- [Ashcroft,76]: *Solid State Physics*, Ashcroft N. W., Mermin N. D., Editorial Saunders (1976).
- [Askerov,94]: *Electron Transport Phenomena in Semiconductors*, Askerov B. M., Editorial World Scientific (1994).
- [Brown,64]: *Bloch Electrons in a Uniform Magnetic Field*, Brown E., Phys. Rev. 133, 1038 (1964).
- [Bruus,93]: *Magnetoconductivity of Quantum Wires with Elastic and Inelastic Scattering*, Bruus H., Flensberg K., Smith H., Phys. Rev. B48, 11144 (1993).
- [Butcher,93]: *The Physics of Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Butcher M., Editorial Plenum Press (1993).
- [Büttiker,86,1]: *Four-Terminal Phase-Coherent Conductance*, Buttiker M., Phys. Rev. Lett. 57, 1761 (1986).
- [Büttiker,88,2]: *Absence of Backscattering in the Quantum Hall Effect in Multiprobe Conductors*, Buttiker M., Phys. Rev. B38, 9375 (1988).
- [Cage,83]: *Dissipation and Dynamic Nonlinear Behavior in the Quantum Hall Regime*, Cage M. E., Dziuba R. F., Field B. F., Williams E. R., Girvin S. M., Gossard A. C., Tsui D. C., Wagner R. J., Phys. Rev. Lett. 51, 1374 (1983).
- [Callen,81]: *Termodinámica*, Callen H. B., Editorial AC (1981).
- [Chakraborty,88]: *The Fractional Quantum Hall Effect*, Chakraborty T., Piteläinen P., Solid-State Sciences 85, Editorial Springer-Verlag (1988).
- [Chang,83,1]: *Fractional Quantum Hall Effect at Low Temperatures*, Chang A. M., Paalanen M. A., Tsui D. C., Störmer H. L., Hwang J. C. M., Phys. Rev. B28, 6133 (1983).

- [Chang,84,2]: *Higher-Order States in the Multiple-Series, Fractional, Quantum Hall Effect*, Chang A. M., Berglund P., Tsui D. C., Störmer H. L., Hwang J. C. M., Phys. Rev. Lett. 53, 997 (1984).
- [ChangC-S,89]: *The Characterization of High Electron Mobility Transistors Using Shubnikov-de Haas Oscillations and Geometrical Magnetoresistance Measurements*, Chang C-S., Fetterman H. R., Viswanathan C. R., J. Appl. Phys. 66, 928 (1989).
- [Chudinov,91]: *Exchange Interaction and the g-Factor for 2D-Electrons in the Heterostructures GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As*, Chudinov S. M., Rodichev D. Yu., Mancini G., Stizza S., Davoli Y., Ciric Y., Solid State Comm. 77, 961 (1991).
- [Clark,86]: *Odd and Even Fractionally Quantized States in GaAs-GaAlAs Heterojunctions*, Clark R. G., Nicholas R. J., Usher A., Foxon C. T., Harris J. J., Surf. Sci. 170, 141 (1986).
- [Coleridge,89,1]: *Low-Field Transport Coefficients in GaAs/Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As Heterostructures*, Coleridge P. T., Stormer R., Fletcher R., Phys. Rev. B39, 1120 (1989).
- [Coleridge,90,2]: *Inter-Subband Scattering in a 2D Electron Gas*, Coleridge P. T., Semicond. Sci. Technol. 5, 961 (1990).
- [Coleridge,91,3]: *Small-Angle Scattering in Two-Dimensional Electron Gas*, Coleridge P. T., Phys. Rev. B44, 3793 (1991).
- [Coleridge,94,4]: *Peak Values of Resistivity in High-Mobility Quantum-Hall-Effect Samples*, Coleridge P. T., Zawadzki P., Sachrajda A. S., Phys. Rev. B49, 10798 (1994).
- [Cunningham,88]: *Quantum Size Effect in Monolayer-Doped Heterostructure*, Cunningham J.E., Tsang W. T., Timp G., Shubert E. F., Chang A. M., Owusu-Sekyere K., Phys. Rev. 37, 4317 (1988).
- [Davidov,81]: *Teoría del Sólido*, Davidov A. S., Editorial Mir (1981).
- [Dingle,52,1]: *Some Magnetic Properties of Metals: I. General Introduction, and Properties of Large Systems of Electrons*, Dingle R. B., Proc. Roy. Soc. A211, 500 (1952).
- [Dingle,52,2]: *Some Magnetic Properties of Metals: II. The Influence of Collisions on the Magnetic Behaviour of Large Systems*, Dingle R. B., Proc. Roy. Soc. A211, 517 (1952).
- [Ebert,82,1]: *Magneto-Quantumtransport on GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostructures at Very Low Temperatures*, Ebert G., Klitzing K. v., Probst C., Ploog K., Solid State Comm. 44, 95 (1982).



- [Ebert,83,2]: *Two-Dimensional Magneto-Quantum Transport on GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostructures under Non-Ohmic Conditions*, Ebert G., Klitzing K. v., Ploog K, Weimann G., J. Phys. C: Solid State Phys. 16, 5441 (1983).
- [Eisenstein,85,1]: *Density of States and de Haas-van Alphen Effect in Two-Dimensional Electron System*, Eisenstein J. P., Störmer H. L., Narayanamurti V., Cho A. Y., Gossard A. C., Tu C. W., Phys. Rev. Lett. 55, 875 (1985).
- [Eisenstein,86,2]: *Magnetization and the Density of States of the 2D Electron Gas in GaAs/AlGaAs Heterostructures*, Eisenstein J. P., Störmer H. L., Narayanamurti V., Cho A. Y., Gossard A. C., Surf. Sci. 170, 271 (1986).
- [Eisenstein,92,3]: *New Fractional Quantum Hall State in Double-Layer Two-Dimensional Electron Systems*, Eisenstein J. P., Boebinger G. S., Pfeiffer L. N., West K. W., Song He, Phys. Rev. Lett. 68, 1383 (1992).
- [Fang,83,1]: *Quantized Magnetoresistance in Two-Dimensional Electron Systems*, Fang F. F., Stiles P. J., Phys. Rev. B27, 6487 (1983).
- [Fang,84,2]: *Quantized Magnetoresistance in Multiply Connected Perimeters in Two-Dimensional Systems*, Fang F. F., Stiles P. J., Phys. Rev. B29, 3749 (1984).
- [Fawcett,64]: *High-field Galvanomagnetic Properties of Metals*, Fawcett E., Advances in Physics 13, 139 (1964).
- [Fernández,92]: *Magnetotransport Properties of Two-Dimensional Channels in Pseudomorphic and Strain Relaxed In<sub>0.17</sub>Ga<sub>0.83</sub>As Heterojunctions*, Fernández J. M., Jianhui Chen, Wieder H. H., J. Vac. Sci. Technol. B10, 1824 (1992).
- [Fowler,66]: *Magneto-Oscillatory Conductance in Silicon Surfaces*, Fowler A. B., Fang F. F., Howard W. E., Stiles P. J., Phys. Rev. Lett. 16, 901 (1966).
- [Gerhardts,75,1]: *Path-Integral Approach to the Two-Dimensional Magneto-Conductivity Problem, I.General Formulation of the Approach*, Zeitschrift für Physik B21, 275 (1975).
- [Gerhardts,75,2]: *Path-Integral Approach to the Two-Dimensional Magneto-Conductivity Problem, II.Application to n-Type (100)-Surface Inversion Layers of p-Silicon*, Zeitschrift für Physik B21, 285 (1975).
- [Gerhardts,76,3]: *Cumulant Approach to the Two-Dimensional Magneto-Conductivity Problem*, Surf. Sci. 58, 227 (1976).
- [Gilpérez,94]: *Tesis Doctoral*, José Manuel Gilpérez, (1994).

- [Goldman,93]: *Universality of the Hall Effect in a Magnetic-Field-Localized Two-Dimensional Electron System*, Goldman V. J., Wang J. K., Su B., Shayegan M., Phys. Rev. Lett. 70, 647 (1993).
- [Goodall,85]: *Capacitance Measurements of a Quantized Two-Dimensional Electron Gas in the Regime of the Quantum Hall Effect*, Goodall R. K., Higgins R. J., Harrang J. P., Phys. Rev. B31, 6597 (1985).
- [Gornik,85]: *Specific Heat of Two-Dimensional Electrons in GaAs-GaAlAs Multilayers*, Gornik E., Lassnig R., Strasser G., Stormer H. L., Gossard A. C., Wiegmann W., Phys. Rev. Lett. 54, 1820 (1985).
- [Haavasoja,84]: *Magnetization Measurements on a Two-Dimensional Electron System*, Haavasoja T., Störmer H. L., Bishop D. J., Narayanamurti V., Gossard A. C., Wiegmann W., Surf. Sci. 142, 294 (1984).
- [Halperin,82,1]: *Quantized Hall Conductance, Current-Carrying Edge States, and the Existence of Extended States in a Two-Dimensional Disordered Potential*, Halperin B. I., Phys. Rev. B25, 2185 (1982).
- [Halperin,83,2]: *Theory of the Quantized Hall Conductance*, Halperin B. I., Helvetica Physica Acta 56, 75 (1983).
- [Haug,87,1]: *Effect of Repulsive and Attractive Scattering Centers on the Magnetotransport Properties of a Two-Dimensional Electron Gas*, Haug R. J., Gerhardt R. R., Klitzing K. v., Ploog K., Phys. Rev. Lett. 59, 1349 (1987).
- [Haug,87,2]: *Analysis of the Asymmetry in Shubnikov-de Haas oscillations of Two-Dimensional Systems*, Haug R. J., Klitzing K. v., Ploog K., Phys. Rev. B35, 5933, (1987).
- [Haug,93,3]: *Edge-State Transport and its Experimental Consequences in High Magnetic Fields*, Haug R. J., Semicond. Sci. Technol. 8, 131 (1993).
- [Hook,91]: *Solid State Physics*, Hook J. R., Hall H. E., Editorial Wiley & Sons (1991).
- [Huang,87]: *Statistical Mechanics*, Huang K., Editorial Wiley & Sons (1987).
- [Igarashi,75]: *Hall Effect in Silicon Inversion Layers under Strong Magnetic Fields*, Igarashi T., Wakabayashi J., Kawaji S., J. Phys. Soc. Jpn. 38, 1549 (1975).
- [Isihara,79,1]: *Study of Two Dimensional Electrons in a Magnetic Field. II. Intermediate Field*, Isihara A., Kojima D. Y., Phys. Rev. B19, 846 (1979).
- [Isihara,81,2]: *Oscillating Susceptibility and g Factor of a Two Dimensional Electron Fluid*, Isihara A., Ioriatti L., Kojima D. Y., Z. Phys. B44, 91 (1981).

- [Isihara,86,3]: *Density and Magnetic Field Dependences of the Conductivity of Two-Dimensional Electron Systems*, Isihara A., Smrcka L., J. Phys. C19, 6777 (1986).
- [Isihara,91,4]: *Condensed Matter Physics*, Isihara A., Editorial Oxford University Press (1991).
- [Isihara,92,5]: *Electron Liquids*, Isihara A., Solid-State Sciences 96, Editorial Springer-Verlag (1992).
- [Jackson,75]: *Classical Electrodynamics*, Jackson J. D., Editorial Wiley & Sons (1975).
- [Jain,92]: *Microscopic Theory of Fractional Quantum Hall Effect*, Jain J. K., Advances in Physics 41, 105 (1992).
- [Joynt,84]: *Conditions for the Quantum Hall Effect*, Joynt R., Prange R. E., Phys. Rev. B29, 3303 (1984).
- [Kane,87]: *Evidence for Edge Currents in the Integral Quantum Hall Effect*, Kane B. E., Tsui D. C., Weinmann G., Phys. Rev. Lett. 59, 1353 (1987).
- [Kawaji,75,1]: *Quantum Galvanomagnetic Effect in n-Channel Silicon Inversion Layers under Strong Magnetic Fields*, Kawaji S., Igarashi T., Wakabayashi J., Supplement of the Progress of Theoretical Physics 57, 176 (1975).
- [Kawaji,85,2]: *Experiments on Localization in Semiconductor Two-Dimensional Systems*, Kawaji S., Supplement of the Progress of Theoretical Physics 84, 178 (1985).
- [Kearney,92]: *Semiclassical Versus Quantum Magnetotransport in Two-Dimensional Disordered Systems*, Kearney M. J., Semicond. Sci. Technol. 7, 804 (1992).
- [Kittel,87]: *Quantum Theory of Solids*, Kittel C., Editorial Wiley & Sons (1987).
- [Klitzing,80,1]: *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Klitzing K. v., Dorda G., Pepper M., Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980).
- [Klitzing,82,2]: *Two-Dimensional Systems: A Method for the Determination of the Fine Structure Constant*, Klitzing K. v., Surf. Sci. 113, 1 (1982).
- [Klitzing,83,3]: *The Quantum Hall Effect*, Klitzing K. v., Ebert G., Physica 117B & 118B, 682 (1983).
- [Klitzing,86,4]: *The Quantum Hall Effect*, Klitzing K. v., Rev. Mod. Phys. 58, 519 (1986).
- [Kolmogórov,78]: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Kolmogórov A. N., Fomín S. V., Editorial Mir (1978).
- [Kohn,59]: *Theory of Bloch Electrons in a Magnetic Field: The Effective Hamiltonian*, Kohn W., Phys. Rev. 115, 1460 (1959).

- [Kubo,57,1]: *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*, Kubo R., J. Phys. Soc. Japan 12, 570 (1957).
- [Kubo,69,2]: *Solid State Physics*, Kubo R., Nagamiya T., Editorial Mc.Graw-Hill (1969).
- [Landau,30,1]: *Diamagnetismus der Metalle*, Landau L. D., Zeitschrift für Physik 42, 629 (1930).
- [Landau,83,2]: *Mecánica Cuántica (Teoría no relativista)*, Landau L. D., Lifshitz E. M., Editorial Reverté (1983).
- [Landauer,70]: *Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices*, Landauer R., Philos. Mag. 57, 768 (1970).
- [Laughlin,81,1]: *Quantized Hall Conductivity in Two Dimensions*, Laughlin, R. B., Phys. Rev. B23, 5632 (1981).
- [Laughlin,82,2]: *Impurities and Edges in the Quantum Hall Effect*, Laughlin, R. B., Surf. Sci. 113, 22 (1982).
- [Laughlin,83,3]: *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Laughlin, R. B., Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983).
- [Laughlin,84,4]: *Primitive and Composite Ground States in the Fractional Quantum Hall Effect*, Laughlin, R. B., Surf. Sci. 142, 163 (1984).
- [Laughlin,85,5]: *Scaling of Conductivities in the Fractional Quantum Hall Effect*, Laughlin, R. B., Cohen M. L., Kosterlitz J. M., Levine H., Libby S. B., Pruisken A. M. M., Phys. Rev. B32, 1311 (1985).
- [Laughlin,90,6]: *Elementary Theory: The Incompressible Quantum Fluid*, Laughlin R. B., Capítulo 7, *The Quantum Hall Effect*, Prange R. E., Girvin S. M., Editorial Springer-Verlag (1990).
- [Leadley,89]: *Influence of Acoustic Phonons on Inter-Subband Scattering in GaAs-GaAlAs Heterojunctions*, Leadley D. R., Nicholas R. J., Harris J. J., Foxon C. T., Semicond. Sci. Technol. 4, 885 (1989).
- [Lifshitz,86]: *Física Estadística II*, Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P., Editorial Reverté (1986).
- [Liu,88]: *Cyclotron Resonance Measurements of Electron Effective Mass in Strained AlGaAs/InGaAs/GaAs Pseudomorphic Structures*, Liu C. T., Lin S. Y., Tsui D. C., Lee H., Ackley D., Appl. Phys. Lett. 53, 2510 (1988).
- [Lo,91,1]: *Two-Dimensional Electron Gas in GaAs/Al<sub>1-x</sub>Ga<sub>x</sub>As Heterostructures: Effective Mass*, Lo I., Mitchel W. C., Perrin R. E., Messham R. L., Yen M. Y., Phys. Rev. 43, 11787 (1991).

- [Lo,95,2]: *Second Subband Population in  $\delta$ -doped  $Al_{0.48}In_{0.52}As/Ga_{0.47}In_{0.53}As$  Heterostructures*, Lo I., Mitchel W. C., Ahoujja M., Cheng J.-P., Fathimulla A., Mier H., Appl. Phys. Lett. **66**, 754 (1995).
- [Luttinger,58]: *Quantum Theory of Electrical Transport Phenomena. II*, Luttinger J. M., Kohn W., Phys. Rev. **109**, 1892 (1958).
- [McEuen,90]: *New Resistivity for High-Mobility Quantum Hall Conductors*, McEuen P. L., Szafer A., Richter C. A., Alphenaar B. W., Jain J. K., Stone A. D., Wheeler R. G., Sacks R. N., Phys. Rev. Lett. **64**, 2062 (1990).
- [Messiah,75]: *Mecánica Cuántica (Tomo II)*, Messiah A., Editorial Tecnos (1975).
- [Moloney,85]: *Gate Capacitance-Voltage Characteristic of MODFET's: Its Effect on Transconductance*, Moloney M. J., Ponse F., Morkoc H., IEEE Transactions on Electron Devices **9**, 1675 (1985).
- [Morawicz,93]: *Enhancement of the 4/3 Fractional Quantum Hall State with Hydrostatic Pressure*, Morwicz N. G., Barnham K. W. J., Briggs A., Foxon C. T., Harris J. J., Najda S. P., Portal J. C., Williams M. L., Semicond. Sci. Technol. **8**, 333 (1993).
- [Mosser,86]: *Density of States of GaAs-AlGaAs-Heterostructures Deduced from Temperature Dependent Magnetocapacitance Measurements*, Mosser V., Weiss D., Klitzing K. v., Ploog K., Weimann G., Solid State Phys. **58**, 5 (1986).
- [Nachtwei,93,1]: *Temperature-dependent Scaling and Current-dependent Non-ohmic Behaviour Between Integer Quantum Hall Plateaux*, Nachtwei G., Breitlow C., Jaeger A., Svoboda P., Streda P., Cukr M., Blik L., Ahlers F.-J., Schlegel H., Semicond. Sci. Technol. **8**, 25 (1993).
- [Nachtwei,94,2]: *Transition from Non-local to Local Electron Conduction at GaAs/GaAlAs Heterojunctions*, Nachtwei G., Breitlow C., Seyfarth J., Heide S., Blik L., Ahlers F.-J., Svoboda P., Cukr M., Semicond. Sci. Technol. **9**, 10 (1994).
- [Onsager,52]: *Interpretation of the de Haas-van Alphen Effect*, Onsager L., Phil. Mag. **43**, 1006 (1952).
- [Prange,81,1]: *Quantized Hall Resistance and the Measurements of the Fine-Structure Constant*, Prange R. E., Phys. Rev. **B23**, 4802 (1981).
- [Prange,90,2]: *Effects of Imperfections and Disorder*, Prange R. E., Capitulo 3, *The Quantum Hall Effect*, Prange R. E., Girvin S. M., Editorial Springer-Verlag (1990).

- [Pruisken,87,1]: *Field Theory, Scaling and the Localization Problem*, Pruisken A. M. M., Capítulo 5, *The Quantum Hall Effect*, Prange R. E., Girvin S. M., Editorial Springer-Verlag (1990).
- [Pruisken,88,2]: *Universal Singularities in the Integral Quantum Hall Effect*, Pruisken A. M. M., Phys. Rev. Lett. 61, 1297 (1988).
- [Raikh,93,1]: *High Landau Levels in a Smooth Random Potencial for Two-Dimensional Electrons*, Raikh M. E., Shahbazyan T. V., Phys. Rev. B47, 1522 (1993).
- [Raikh,94,2]: *Magnetocapacitance Oscillations in a Periodically Modulated Two-Dimensional Electron Gas in the Presence of a Smooth Random Potencial*, Raikh M. E., Shahbazyan T. V., Phys. Rev. B49, 1935 (1994).
- [Ridley,92]: *Quantum Processes in Semiconductors*, Ridley B. K., Editorial Oxford University Press (1992).
- [Riess,93]: *Electric Field Dependent Mobility Edge and Theory of the Breakdown of the Integer Quantum Hall Effect*, Riess J., Physica B190, 366 (1993).
- [Sajoto,93]: *Hall Resistance of the Reentrant Insulating Phase Around the 1/5 Fractional Quantum Hall Liquid*, Sajoto T., Li Y. P., Engel L. W., Tsui D. C., Shayegan M., Phys. Rev. Lett. 70, 2321 (1993).
- [Schacham,92]: *Intermodulation in the Oscillatory Magnetoresistance of a Two-Dimensional Electron Gas*, Schacham S. E., Haugland E. J., Alterovitz S. A., Phys. Rev. B45, 13417 (1992).
- [Shalimova,75]: *Física de los Semiconductores*, Shalimova K. V., Editorial Mir (1975).
- [Shoenberg,84]: *Magnetic Oscillations in Metals*, Shoenberg D., Editorial Cambridge University Press (1984).
- [Smith,85,1]: *Direct Measurement of the Density of States of a Two-Dimensional Electron Gas*, Smith T. P., Goldberg B. B., Stiles P. J., Heiblum M., Phys. Rev. B32, 2696 (1985).
- [Smith,86,2]: *Magnetocapacitance Measurements in GaAs Heterostructures*, Smith T. P., Goldberg B. B., Heiblum M., Stiles P. J., Surf. Sci. 170, 304 (1986).
- [Smith,88,3]: *Upper-Subband Transport in GaAs Heterostructures*, Smith T. P., Fang F. F., Phys. Rev. B37, 4303 (1988).
- [Smrcka,77,1]: *Transport Coefficients in Strong Magnetic Fields*, Smrcka L., Streda P., J. Phys. C10, 2153 (1977).
- [Smrcka,86,2]: *Carrier and Field Dependences of the Magnetoconductance of Two-Dimensional Electron Systems*, Smrcka L., Isihara A., Solid State Comm. 57, 259 (1986).

- [Störmer,83,1]: *Fractional Quantization of the Hall Effect*, Störmer H. L., Chang A. M., Tsui D. C., Hwang J. C. M., Gossard A. C., Wiegmann W., Phys. Rev. Lett. 50, 1953 (1983).
- [Störmer,84,2]: *Novel Physics in Two Dimensions with Modulation-Doped Heterostructures*, Störmer H. L., Surf. Sci. 142, 130 (1984).
- [Störmer,94,3]: *The Fractional Quantum Hall Effect in a New Light*, Störmer H. L., Du R. R., Kang W., Tsui D. C., Pfeiffer L. N., Baldwin K. W., West K. W., Semicond. Sci. Technol. 9, 1853 (1994).
- [Streda,82,1]: *Theory of Quantised Hall Conductivity in Two Dimensions*, Streda P., J. Phys. C15, L717 (1982).
- [Streda,75,2]: *Galvanomagnetic Effects in Alloys in Quantizing Magnetic Fields*, Streda P., Smrcka L., Phys. Stat. Sol. (b) 70, 537 (1975).
- [Sutton,93]: *Electronic Structure of Materials*, Sutton A. P., Editorial Oxford University Press (1993).
- [Suen,92]: *Observation of a  $\nu=1/2$  Fractional Quantum Hall State in a Double-Layer Electron System*, Suen Y. W., Engel L. W., Santos M. B., Shayegh M., Tsui D. C., Phys. Rev. Lett. 68, 1379 (1992).
- [Susana,95]: *Tesis Doctoral*, Susana Fernández de Avila, (1995).
- [Takaoka,92,1]: *Nonlocal Quantum Conduction and the Influence of Contact Resistance in GaAs/AlGaAs Wires*, Takaoka S., Tsukagoshi K., Oto K., Sawasaki T., Murase K., Takagaki Y., Gamo K., Namba S., Surf. Sci. 267, 282 (1992).
- [Takaoka,94,2]: *Magnetocapacitance and the Edge State of a Two Dimensional Electron System in the Quantum Hall Regime*, Takaoka S., Oto K., Kurimoto H., Murase K., Gamo K., Nishi S., Phys. Rev. Lett. 72, 3080 (1994).
- [Tan,94]: *A microscopic study of Landau Level States in Quantum Wires*, Tan W., Inkson J. C., Srivastava G. P., Semicond. Sci. Technol. 9, 1305 (1994).
- [Thouless,93]: *Edge Voltages and Distributed Currents in the Quantum Hall Effect*, Thouless D. J., Phys. Rev. Lett. 71, 1879 (1993).
- [Tsui,82]: *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Tsui et al., Phys. Rev. Lett. 48, 1559 (1982).
- [Tsukagoshi,91]: *Nonlocal Shubnikov-de Haas Oscillations Through Edge and Bulk Currents in GaAs/AlGaAs Mesoscopic Quantum Wires*, Tsukagoshi K., Oto K., Takaoka S., Murase K., Takagaki Y., Gamo K., Namba S., Solid State Comm. 80, 797 (1991).

- [Wakabayashi,78,1]: *Hall Effect in Silicon MOS Inversion Layers under Strong Magnetic Fields*, Wakabayashi J., Kawaji S., J. Phys. Soc. Jpn. 44, 1839 (1978).
- [Wakabayashi,80,2]: *Hall Current Measurement under Strong Magnetic Fields for Silicon MOS Inversion Layers*, Wakabayashi J., Kawaji S., J. Phys. Soc. Jpn. 48, 333 (1980).
- [Wang,88,1]: *Heat Capacity of the Two-Dimensional Electron Gas in GaAs/Al<sub>x</sub>Al<sub>1-x</sub>As Multiple-quantum-well Structures*, Wang J. K., Campbell J. H., Tsui D. C., Cho A. Y., Phys. Rev. B38, 6174 (1988).
- [Wang,92,2]: *Heat-capacity Study of Two Dimensional Electrons in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Multiple-quantum-well Structures in High Magnetic Fields: Spin-split Landau levels*, Wang J. K., Tsui D. C., Santos M., Shayegan M., Phys. Rev. B45, 4384 (1992).
- [Wannier,62]: *Dynamics of Band Electrons in Electric and Magnetic Fields*, Wannier G. H., Rev. Mod. Phys. 34, 645 (1962).
- [Wees,88,1]: *Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas*, van Wees B. J., van Houten H., Beenakker C. W. J., Williamson J. G., Kouwenhoven L. P., van der Marel D., Foxon C. T., Phys. Rev. Lett. 60, 848 (1988).
- [Wees,91,2]: *Quantum Ballistic and Adiabatic Electron Transport Studied with Quantum Point Contacts*, van Wees B. J., Kouwenhoven L. P., Willems E. M. M., Harmans C. J. P. M., Mooij J. M., van Houten H., Beenakker C. W. J., Williamson J. G., Foxon C. T., Phys. Rev. B43, 12431 (1991).
- [Weisz,89]: *Characterization of Narrow Quantum Channels Using Model Potentials*, Weisz J. F., Berggren K. F., Phys. Rev. B40, 1325 (1989).
- [Wharam,88]: *One-Dimensional Transport and the Quantisation of the Ballistic Resistance*, J. Phys. C:Solid State Phys. 21, L209 (1988).
- [Wick,54]: *Solution of the Field Problem of the Germanium Gyrator*, J. Appl. Phys. 25, 741 (1954).
- [Willet,87,1]: *Observation of an Even-Denominator Quantum Number in the Fractional Quantum Hall Effect*, Willet R. L., Eisenstein J. P., Störmer H. L., Tsui D. C., Gossard A. C., English J. H., Phys. Rev. Lett. 59, 1776 (1987).
- [Willet,88,2]: *Termination of the Series of Fractional Quantum Hall States at Small Filling Factors*, Willet R. L., Störmer H. L., Tsui D. C., Pfeiffer L. N., West K. W., Baldwin K. W., Phys. Rev. B38, 7881 (1988).
- [Yndurain,88]: *Mecánica Cuántica*, Yndurain F. J., Editorial Alianza Universidad Textos (1988).



- [Yoshihiro,85]: *Determination of the Fine Structure Constant Based on the Quantum Hall Effect*, Yoshihiro K., Kinoshita J., Supplement of the Progress of Theoretical Physics 84, 215 (1985).
- [Zak,64,1]: *Magnetic Translation Group*, Zak J., Phys. Rev. 134, 1602 (1964).
- [Zak,64,2]: *Magnetic Translation Group. II. Irreducible Representations*, Zak J., Phys. Rev. 134, 1607 (1964).
- [Zak,86,3]: *Effective Hamiltonians and Magnetic Energy Bands?*, Zak J., Physics Letter A117, 367 (1986).
- [Zawadzki,84]: *Specific Heat and Magneto-Thermal Oscillations of Two-Dimensional Electron Gas in a Magnetic Field*, Zawadzki W., Lassnig R., Solid State Comm. 50, 537 (1984).
- [Zheng,85]: *Observation of Size Effects in the Quantum Hall Regime*, Zheng H. Z., Choi K. K., Tsui D. C., Weimann G., Phys. Rev. Lett. 55, 1144 (1985).
- [Ziman,64]: *Principios de la Teoría de Sólidos*, Ziman J. M., Editorial Selecciones Científicas (1964).
- [Ziman,79]: *Electrons and Phonons*, Ziman J. M., Editorial Oxford University Press (1979).